СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В трех частях

Под общей редакцией
доктора физико-математических наук,
профессора *А. П. Рябушко*

Часть 1

Допущено Министерством
народного образования БССР
в качестве учебного пособия
для студентов инженерно-технических
специальностей вузов

Минск
«Вышэйшая школа»
1990

ББК 22.11я73
С23
УДК 51 (076.1) (075.8)

Авторы: А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского энергетического института; зав. кафедрой высшей математики Минского радиотехнического института, д-р физ.-мат. наук, проф. Л. А. Черкас

$$С\,\frac{1602010000-098}{М304(03)-90}\,10-90$$

ISBN 5-339-00326-4 (ч. 1)
ISBN 5-339-00483-X

ПРЕДИСЛОВИЕ

В Основных направлениях перестройки высшего и среднего специального образования в стране, приказах Государственного комитета СССР по народному образованию и других документах подчеркивается необходимость перехода от пассивных форм обучения к активной творческой работе со студентами, от «валового» обучения к усилению индивидуального подхода, к развитию творческих способностей обучаемых путем расширения их самостоятельной работы. Такой путь развития и перестройки высшей школы предполагает новое методическое обеспечение учебного процесса: создание современных методик проведения лекционных, практических и лабораторных занятий, подкрепленных соответствующими методическими и учебными пособиями, разработку новых форм самостоятельной работы, методов ее контроля и т. д.

Имеющиеся в настоящее время сборники задач и упражнений по общему курсу высшей математики для втузов не дают возможности индивидуализировать обучение из-за своей структуры (малое количество однотипных задач и упражнений, неудачный с методической точки зрения подбор задач). Активизация познавательной деятельности студентов, выработка у них способности самостоятельно решать достаточно сложные проблемы может быть достигнута, по мнению авторов, при такой организации учебного процесса, когда каждому студенту выдаются индивидуальные домашние задания (ИДЗ) и достаточно часто проводятся самостоятельные (контрольные) работы во время аудиторных занятий (АЗ) с обязательным последующим контролем их выполнения и выставлением оценок. Это мнение подкрепляется личным опытом авторов и педагогическими экспериментами, проведенными в последние годы в ряде втузов, например в Белорусском институте механизации сельского хозяйства, Белорусском и Дальневосточном политехнических институтах.

Данная книга является первой частью комплекса учебных пособий под общим названием «Сборник индивидуальных заданий по высшей математике», написанного в соответствии с действующими программами курса высшей математики в объеме 380—450 часов для инженерно-технических специальностей вузов. Этот комплекс также может быть использован в вузах других профилей, в которых количество часов, отведенное на изучение высшей математики, значительно меньше. (Для этого из предлагаемого материала следует сделать необходимую выборку.) Кроме того, он вполне доступен для студентов вечерних и заочных отделений втузов.

Предлагаемое пособие адресовано преподавателям и студентам и предназначено для проведения практических занятий и самостоятельных (контрольных) работ в аудитории и выдачи ИДЗ по всем разделам курса высшей математики.

В первой части данного комплекса содержится материал по линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии и дифференциальному исчислению функций одной переменной.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам — коллективу кафедры высшей математики Московского энергетического института, возглавляемой членом-корреспондентом АН СССР, доктором физико-математических наук, профессором С. И. Похожаевым, и заведующему кафедрой высшей математики Минского радиотехнического института, доктору физико-математических наук, профессору Л. А. Черкасу, а также сотрудникам этих кафедр кандидатам физико-математических наук, доцентам Л. А. Кузнецову, П. А. Шмелеву, А. А. Карпуку — за ценные замечания и советы, способствовавшие улучшению книги.

Все отзывы и пожелания просьба присылать по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Охарактеризуем структуру пособия, методику его использования, организацию проверки и оценки знаний, навыков и умений студентов.

Весь практический материал по курсу высшей математики разделен на главы, в каждой из которых даются необходимые теоретические сведения (основные определения, понятия, формулировки теорем, формулы), используемые при решении задач и выполнении упражнений. Изложение этих сведений иллюстрируется решенными примерами. (Начало решения примеров обозначается символом ▶, а конец — ◀.) Затем даются подборки задач с ответами для всех практических аудиторных занятий (АЗ) и самостоятельных (мини-контрольных) работ на 10—15 минут во время этих занятий. И, наконец, приводятся недельные индивидуальные домашние задания (ИДЗ), каждое из которых содержит 30 вариантов и сопровождается решением типового варианта. Часть задач из ИДЗ снабжена ответами. В конце каждой главы помещены дополнительные задачи повышенной трудности и прикладного характера.

В приложении приведены одно- и двухчасовые контрольные работы (каждая по 30 вариантов) по важнейшим темам курса.

Нумерация АЗ сквозная и состоит из двух чисел: первое из них указывает на главу, а второе — на порядковый номер АЗ в этой главе. Например, шифр АЗ-2.1 означает, что АЗ относится ко второй главе и является первым по счету. В первой части пособия содержится 27 АЗ и 14 ИДЗ.

Для ИДЗ также принята нумерация по главам. Например, шифр ИДЗ-5.2 означает, что ИДЗ относится к пятой главе и является вторым. Внутри каждого ИДЗ принята следующая нумерация: первое число означает номер задачи в данном задании, а второе — номер варианта. Таким образом, шифр ИДЗ-5.2 : 16 означает, что студент должен выполнить 16-й вариант из ИДЗ-5.2, который содержит задачи 1.16, 2.16, 3.16, 4.16. При выдаче ИДЗ студентам номера́ выполняемых вариантов можно менять от задания к заданию по какой-либо системе или случайным образом. Более того, можно при выдаче ИДЗ любому студенту составить его вариант, комбинируя однотипные задачи из разных вариантов. Например, шифр ИДЗ-3.1 : 1.2; 2.4; 3.6 означает, что студенту следует решать в ИДЗ-3.1 первую задачу из варианта 2, вторую — из варианта 4 и третью — из варианта 6. Такой комбинированный метод выдачи ИДЗ позволяет из 30 вариантов получить большое количество новых вариантов.

Внедрение ИДЗ в учебный процесс некоторых втузов (Белорусский институт механизации сельского хозяйства, Белорусский политехнический институт, Дальневосточный политехнический институт и др.) показало, что целесообразнее выдавать ИДЗ не после каждого АЗ (которых, как правило, два в неделю), а одно недельное ИДЗ, включающее в себя основной материал двух АЗ данной недели.

Дадим некоторые общие рекомендации по организациям работы студентов в соответствии с настоящим пособием.

1. В вузе студенческие группы по 25 человек, проводятся два АЗ в неделю, планируются еженедельные необязательные для посещения студентами консультации, выдаются недельные ИДЗ. При этих условиях для систематического контроля с выставлением оценок, указанием ошибок и путей их исправления могут быть использованы выдаваемые каждому преподавателю матрицы ответов и банк листов решений, которые кафедра заготавливает для ИДЗ (студентам они не выдаются). Если матрицы ответов составляются для всех задач из ИДЗ, то листы решений разрабатываются только для тех задач и вариантов, где важно проверить правильность выбора метода, последовательности действий, навыков и умений при вычислениях. Кафедра определяет, для каких ИДЗ нужны листы решений. Листы решений (один вариант располагается на одном листе) используются при самоконтроле правильности выполнения заданий студентами, при взаимном студенческом контроле, а чаще всего при комбинированном контроле: преподаватель проверяет лишь правильность выбора метода, а студент по листу решений — свои вычисления. Эти методы позволяют проверить

ИДЗ 25 студентов за 15—20 минут с выставлением оценок в журнал.

2. Студенческие группы в вузе по 15 человек, проводятся по два АЗ в неделю, в расписание для каждой группы включены обязательные два часа в неделю самоподготовки под контролем преподавателя. При этих условиях (которые созданы, например, в Белорусском институте механизации сельского хозяйства) организация индивидуальной, самостоятельной, творческой работы студентов, оперативного контроля за качеством этой работы значительно улучшается. Рекомендованные выше методы пригодны и в данном случае, однако появляются новые возможности. На АЗ быстрее проверяются и оцениваются ИДЗ, во время обязательной самоподготовки можно проконтролировать проработку теории и решение ИДЗ, выставить оценки части студентов, принять задолженности по ИДЗ у отстающих.

Накапливание большого количества оценок за ИДЗ, самостоятельные и контрольные работы в аудитории позволяет контролировать учебный процесс, управлять им, оценивать качество усвоения изучаемого материала.

Все это дает возможность отказаться от традиционного итогового семестрового (годового) экзамена по материалу всего семестра (учебного года) и ввести так называемый блочно-цикловой (модульно-цикловой) метод оценки знаний и навыков студентов, состоящий в следующем. Материал семестра (учебного года) разделяется на 3—5 блоков (модулей), по каждому из которых выполняются АЗ, ИДЗ и в конце каждого цикла — двухчасовая письменная коллоквиум-контрольная работа, в которую входят 2—3 теоретических вопроса и 5—6 задач. Учет оценок по АЗ, ИДЗ и коллоквиуму-контрольной позволяет вывести объективную общую оценку за каждый блок (модуль) и итоговую оценку по всем блокам (модулям) семестра (учебного года). Подобный метод внедряется, например, в Белорусском институте механизации сельского хозяйства.

В заключение отметим, что пособие в основном ориентировано на студента средних способностей, и усвоение содержащегося в нем материала гарантирует удовлетворительные и хорошие знания по курсу высшей математики. Для одаренных и отлично успевающих студентов необходима подготовка заданий повышенной сложности (индивидуальный подход в обучении!) с перспективными поощрительными мерами. Например, можно разработать для таких студентов специальные задания на весь семестр, включающие задачи настоящего пособия и дополнительные более сложные задачи и теоретические упражнения (для этой цели, в частности, предназначены дополнительные задачи в конце каждой главы). Преподаватель может выдать эти задания в начале семестра, установить график их выполнения (под своим контролем), разрешить свободное посещение лекционных или практических занятий по высшей математике и в случае успешной работы выставить отличную оценку до экзаменационной сессии.

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Определителем n-го порядка называется число Δ_n, записываемое в виде квадратной таблицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

и вычисляемое, согласно указанному ниже правилу, по заданным числам a_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$, которые называются *элементами определителя* (всего их n^2). Индекс i указывает номер строки, а j — номер столбца квадратной таблицы (1.1), на пересечении которых находится элемент a_{ij}. Любую строку или столбец этой таблицы будем называть *рядом.*

Главной диагональю определителя называется совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Минором M_{ij} *элемента* a_{ij} называется определнтель $(n-1)$-го порядка Δ_{n-1}, получеиный из определителя n-го порядка Δ_n вычеркнванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическое дополнение A_{ij} *элемента* a_{ij} определяется равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Значенне определителя Δ_n находнтся по следующему правилу. Для $n = 2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.2)$$

Для $n = 3$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \quad (1.3)$$

где

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Величины A_{11}, A_{12}, A_{13} — алгебраические дополнения, а M_{11}, M_{12}, M_{13} — миноры определителя Δ_3, соответствующие его элементам a_{11}, a_{12}, a_{13}. Эти миноры являются определителями второго порядка, получаемыми из определителя Δ_3 вычеркиванием соответствующих строки и столбца. Например, чтобы найти минор M_{12}, следует в определителе Δ_3 вычеркнуть первую строку и второй столбец.

Для произвольного n

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k}, \tag{1.4}$$

где $A_{1k} = (-1)^{1+k} M_{1k}$, а миноры M_{1k}, являющиеся определителями $(n-1)$-го порядка, получаются из Δ_n вычеркиванием первой строки и k-го столбца.

Например,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 1 = 17;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= 4(-7) - 7(21 - 25) - 2 \cdot 5 = -10;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} -$$
$$-1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= -(4(-4) + 3 \cdot 4 - 2 \cdot 0) - (0(-4) - 4 - 2 \cdot 5) + 2(0(-12) -$$
$$- 4 \cdot 4 - 2 \cdot 15) = -74.$$

Замечание. Если элементами определителя являются некоторые функции, то данный определитель, вообще говоря, тоже функция (но может быть и числом). Например,

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x;$$

$$\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1;$$

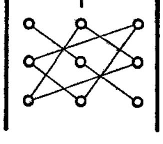
$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg} x & 2 \\ 1/2 & \operatorname{ctg} x \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0.$$

Правило вычисления определителя Δ_3 равносильно *правилу треугольников (правилу Саррюса):*

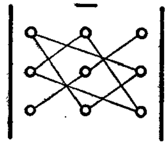
$$\Delta_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$
$$- (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}). \tag{1.5}$$

Схематическая запись этого правила приведена ниже:

$+$



$-$



Например,

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 6 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 6\cdot 1+2\cdot 5\cdot 2+4(-1)(-3)-$$
$$-((-3)\cdot 6\cdot 2+2\cdot 4\cdot 1+5(-1)1)=71.$$

Перечислим *основные свойства определителей:*

1) сумма произведений элементов любого ряда определителя и их алгебраических дополнений не зависит от номера ряда и равяа этому определителю:

$$\Delta_n=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}. \qquad 1.6)$$

Эти равенства можно было бы (как и формулу (1.4)) принять за правило вычисления определителя. Первое из них называется *разложением* Δ_n *по элементам i-й строки,* а второе — *разложением* Δ_n *по элементам j-го столбца;*

2) значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами, и иаоборот;

3) если поменять местами два параллельных ряда определителя, то он измеиит зиак на противоположиый;

4) определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равеи нулю;

5) если все элементы некоторого ряда определителя имеют общий мюжитель, то последний можно вынести за знак определителя. Отсюда следует, что если элементы какого-либо ряда умиожить на число λ, то определитель Δ_n умножится на это же число λ;

6) если все элементы какого-либо ряда определителя равиы иулю, то определитель также равеи нулю;

7) определитель, у которого элементы двух параллельных рядов соответствеино пропорциональны, равен нулю;

8) сумма всех произведений элемеятов какого-либо ряда определителя и алгебраических дополнений соответствующих элементов другого параллельного ряда равна нулю, т. е. верны равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=0,\quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=0\ (i\neq j);$$

9) если каждый элемент какого-либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором — из вторых слагаемых:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & \dots & a_{1i}+b_{1i} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & a_{2i}+b_{2i} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{ni}+b_{ni} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}+$$
$$+\begin{vmatrix}a_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & b_{2i} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & b_{ni} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1+2 & 4 \\ 7 & 3-1 & 3 \\ 4 & 2+3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 7 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix};$$

10) определитель не изменится, если ко всем элементам какого-либо его ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ряда, умноженные на одно и то же произвольное число λ. Например, для столбцов определителя это свойство выражается равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i}+\lambda a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i}+\lambda a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni}+\lambda a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим *основные методы вычисления определителей.*

1. *Метод эффективного понижения порядка.* В соответствии со свойством 4 вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка. Этот метод понижения порядка не эффективен. Используя основные свойства определителей, вычисление $\Delta_n \neq 0$ всегда можно свести к вычислению одного определителя $(n-1)$-го порядка, сделав в каком-либо ряду Δ_n все элементы, кроме одного, равными нулю. Покажем это на примере.

Пример 1. Вычислить определитель

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 30 & -10 & 120 & 80 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}.$$

► По свойству 5 определителей из первой строки вынесем множитель 10, а затем будем последовательно умножать полученную строку на 3, 1, 2 и складывать соответственно со второй, третьей и четвертой строками. Тогда, согласно свойству 10, имеем:

$$\Delta_4 = 10 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

По свойству 1 определителей (см. второе из равенств (1.6)) полученный определитель можно разложить по элементам второго столбца. Тогда

$$\Delta_4 = 10 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

Получили определитель третьего порядка, который можно вычислить по правилу Саррюса или подобным же приемом свести к вычислению одного определителя второго порядка. Действительно, вычитая из второй и третьей строк данного определителя первую строку, получаем

$$\Delta_4 = 10\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 10 \cdot 7 \cdot 13 = 910. \quad \blacktriangleleft$$

2. *Приведение определителя к треугольному виду.* Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется *определителем треугольного вида.* Очевидно, что в этом случае определитель равен произведению элементов его главной диагонали. Приведение любого определителя Δ_n к треугольному виду всегда возможно.

Пример 2. Вычислить определитель

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}.$$

► Выполним следующие операции. Пятый столбец определителя сложим с первым, этот же столбец, умноженный на 3,— со вторым, на 2 — с третьим, на 8 — с четвертым столбцом. В итоге получим определитель треугольного вида, который равен исходному:

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -12 & -2 \\ 0 & 7 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -62 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 22 = -5544. \quad \blacktriangleleft$$

Приведение определителей к треугольному виду будет использоваться в дальнейшем при решении систем линейных уравнений методом Жордана — Гаусса (его называют также методом Гаусса).

АЗ-1.1

1. С помощью правила треугольников (правила Саррюса) вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* а) -36; б) 0; в) 87.)

2. Методом понижения порядка вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 15\,325 & 15\,323 & 37\,527 \\ 23\,735 & 23\,735 & 17\,417 \\ 23\,737 & 23\,737 & 17\,418 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* а) $-22\,198$; б) 16.)

3. Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* а) 48; б) 20.)

4. Вычислить определители, предварительно упростив их:

а) $\begin{vmatrix} x^2+a^2 & ax & 1 \\ y^2+a^2 & ay & 1 \\ z^2+a^2 & az & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 5 & 5 & 3 \\ 10 & 11 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & 10 & 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* а) $a(x-y)(y-z)(x-z)$; б) 5.)

Самостоятельная работа

Вычислить определители.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. (*Ответ:* 54.)

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. (*Ответ:* 160.)

3. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$. (*Ответ:* -27.)

1.2. МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Прямоугольная таблица, составленная из $m \times n$ элементов a_{ij} ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$) некоторого множества, называется *матрицей* и записывается в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Элементы матрицы нумеруются 2 индексами. Первый индекс i элемента a_{ij} обозначает номер строки, а второй j — номер столбца, на пересечении которых находится этот элемент в матрице. Матрицы обычно обозначают прописными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \dots$ Если у матрицы m строк и n столбцов, то по определению она имеет размерность $m \times n$. В случае необходимости это обозначается следующим образом: $A_{m \times n}$. Матрица называется *числовой*, если ее элементы a_{ij} — числа; *функциональной*, если a_{ij} — функции; *векторной*, если a_{ij} — векторы, и т. д. Матрицы A и B называются *равными*, если все их соответствующие элементы a_{ij} и b_{ij} равны, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$. Следовательно, равными могут быть только матрицы одинаковой размерности. Матрицы, у которых $m = n$, называются *квадратными*. Если $i = 1$, то получаем *матрицу-строку*; если $j = 1$, имеем *матрицу-столбец*. Их также называют *вектор-строкой* и *вектор-столбцом* соответственно.

Перечислим *основные операции над матрицами*.

1. *Сложение и вычитание матриц*. Эти операции определяются только для матриц одинаковой размерности. *Суммой (разностью) матриц A и B*, обозначаемой $A + B$ ($A - B$), называется матрица C, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, где a_{ij} и b_{ij} — соответственно элементы матриц A и B. Например, пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{bmatrix}.$$

2. *Умножение матрицы на число. Произведением матрицы A и числа λ*, обозначаемым λA, называется матрица B той же размерности, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, где a_{ij} — элементы матрицы A, т. е. при умножении матрицы на число (числа на матрицу) надо все элементы матрицы умножить на это число. Например, пусть

$$\lambda = -2, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\lambda A = -2 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -14 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. *Умножение матриц. Произведением матриц* $A_{m\times n}$ *и* $B_{n\times p}$ называется матрица $C_{m\times p}=A\cdot B$ (или проще AB), элементы которой $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, где a_{ik}, b_{kj} — элементы матриц A и B. Отсюда следует, что произведение AB существует только в случае, когда первый множитель A имеет число столбцов, равное числу строк второго множителя B. Далее, число строк матрицы AB равно числу строк A, а число столбцов — числу столбцов B. Из существования произведения AB не следует существование произведения BA. В случае его существования, как правило $BA\neq AB$. Если $AB=BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными* (или *коммутирующими*). Известно, что всегда $(AB)C=A(BC)$.

Пример 1. Найти AB и BA, если:

$$A=\begin{bmatrix}4 & -5 & 8\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -2 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}.$$

▶ Имеем:

$$AB=C_{2\times 2}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix},$$

где $c_{11}=4(-1)+(-5)(-2)+8\cdot 3=30$; $c_{12}=4\cdot 5+(-5)(-3)+8\cdot 4=67$; $c_{21}=1(-1)+3(-2)+(-1)3=-10$; $c_{22}=1\cdot 5+3(-3)+(-1)4=-8$.

В результате $AB=\begin{bmatrix}30 & 67\\ -10 & -8\end{bmatrix}$.

Далее находим

$$BA=\tilde{C}_{3\times 3}=\begin{bmatrix}\tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{13}\\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} & \tilde{c}_{23}\\ \tilde{c}_{31} & \tilde{c}_{32} & \tilde{c}_{33}\end{bmatrix},$$

где $\tilde{c}_{11}=(-1)4+5\cdot 1=1$; $\tilde{c}_{12}=(-1)(-5)+5\cdot 3=20$; $\tilde{c}_{13}=(-1)8+5(-1)=-13$; $\tilde{c}_{21}=(-2)4+(-3)1=-11$; $\tilde{c}_{22}=(-2)(-5)+(-3)3=1$; $\tilde{c}_{23}=(-2)8+(-3)(-1)=-13$; $\tilde{c}_{31}=3\cdot 4+4\cdot 1=16$; $\tilde{c}_{32}=3(-5)+4\cdot 3=-3$; $\tilde{c}_{33}=3\cdot 8+4(-1)=20$. Имеем:

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 20 & -13\\ -11 & 1 & -13\\ 16 & -3 & 20\end{bmatrix}.$$

Итак, $AB\neq BA$. ◀

Пример 2. Даны матрицы: $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$. Найти AB и BA.

▶ Имеем:

$$AB=\begin{bmatrix}3\cdot 1+5(-1) & 3(-5)+5\cdot 2\\ 1\cdot 1+2(-1) & 1(-5)+2\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -5\\ -1 & -1\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix} 1\cdot 3+(-5)1 & 1\cdot 5+(-5)2 \\ (-1)3+2\cdot 1 & (-1)5+2\cdot 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $AB=BA$. ◀

Пример 3. Найти $(AB)C$ и $A(BC)$, если:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

▶ Имеем:

$$AB=\begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -1 & 9 & -2 \\ 9 & 3 & -3 \end{bmatrix},\quad (AB)C=\begin{bmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{bmatrix},$$

$$BC=\begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix},\quad A(BC)=\begin{bmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{bmatrix},$$

т. е. $(AB)C=A(BC)$. ◀

АЗ-1.2

1. Даны матрицы A и B. Найти: $A+B$, $2A$, $A-3B$, если:

а) $A=\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$;

б) $A=\begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -4 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 11 & 7 \end{bmatrix}$

2. Даны матрицы A и B. Найти AB и BA, если:

а) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$;

б) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

в) $A=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B=[5 \quad -2 \quad 3]$;

г) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$;

д) $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} \beta & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(*Ответ:* а) $AB=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 0 & -11 & 19 \\ 13 & 13 & 29 \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} 6 & -7 & 30 \\ -13 & -2 & -8 \\ 21 & 3 & 18 \end{bmatrix}$;

б) $AB=\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 17 \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} 21 & -7 & 35 \\ 15 & -1 & 20 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

в) $BA=[13]$, $AB=\begin{bmatrix} 15 & -6 & 9 \\ 20 & -8 & 12 \\ 10 & -4 & 6 \end{bmatrix}$;

г) $AB=BA=\begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$;

д) $AB=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.)

3. Для матрицы A найти все перестановочные (коммутирующие) с ней квадратные матрицы B. Проверить выполнимость равенства $AB=BA$, если:

а) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(*Ответ:* а) $B=\begin{bmatrix} 3b & -b \\ b & 2b \end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix} a+b & 5a \\ a & b \end{bmatrix}$, где a, b — любые числа (параметры).)

4. Даны матрицы A, B и C. Найти $A(BC)$, $(AB)C$ и показать, что $(AB)C=A(BC)$, если:

а) $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 5 & 14 \\ -2 & -30 \end{bmatrix}$;

б) $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 9 & -7\\ 8 & 3 & 11 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4\\ 3\\ -2\\ 8\end{bmatrix}$,

$C=[-1\quad 9\quad 3\quad 6]$.

(*Ответ:* а) $ABC=\begin{bmatrix}43 & 96\\ 18 & 758\\ 28 & 1030\end{bmatrix}$;

б) $ABC=\begin{bmatrix}52 & -468 & -156 & -312\\ -19 & 171 & 57 & 114\end{bmatrix}$.)

Самостоятельная работа

1. Даны матрицы:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Найти те из произведений AB, BA, AC, CA, BC, CB, которые имеют смысл.

(*Ответ:* $BA=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -2\\ 3 & -1 & 5\end{bmatrix}$, $AC=\begin{bmatrix}4 & 5 & 5 & 0\\ 2 & 6 & 6 & 0\end{bmatrix}$.)

2. Для данных матриц A и B найти $(A+3B)^2$, если:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & -8\\ -3 & 6 & 9\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

(*Ответ:* $\begin{bmatrix}96 & 12 & 8\\ -18 & 54 & -8\\ 51 & 85 & 111\end{bmatrix}$.)

3. Найти $(AB)C$ и $A(BC)$, если:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 9 & 7\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}5 & 9\\ 0 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 0\end{bmatrix}.$$

(*Ответ:* $\begin{bmatrix}-11 & 100\\ -5 & 0\end{bmatrix}$.)

1.3. ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. РАНГ МАТРИЦЫ. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА — КАПЕЛЛИ

Квадратная матрица порядка n

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1.8)$$

называется *невырожденной*, если ее определитель (детерминант)

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1.9)$$

В случае, когда $\det A=0$, матрица A называется *вырожденной*.

Только для квадратных невырожденных матриц A вводится понятие обратной матрицы A^{-1}. Матрица A^{-1} называется *обратной* для квадратной невырожденной матрицы A, если $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, где E — единичная матрица порядка n:

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \qquad (1.10)$$

Известно, что для A существует единственная обратная матрица A^{-1}, которая определяется формулой

$$A^{-1}=\frac{A^*}{\det A}, \quad A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (1.11)$$

Матрица A^* называется *присоединенной*, ее элементами являются алгебраические дополнения A_{ij} *транспонированной матрицы* A^T, т. е. матрицы, полученной из данной матрицы A заменой ее строк столбцами с теми же номерами:

$$A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (1.12)$$

Пример 1. Дана матрица A. Убедиться, что она невырожденная, найти обратную ей матрицу A^{-1} и проверить выполнимость равенств $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, если:

а) $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

▶ а) Имеем $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Далее находим алгебраические дополнения: $A_{11} = 3$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = -1$. Следовательно,

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}, \quad AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}A;$$

б) Вычисляем $\det A = -8 \neq 0$ и алгебраические дополнения $A_{11} = -2$, $A_{12} = 2$, $A_{13} = 4$, $A_{21} = 3$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = -2$, $A_{31} = -7$, $A_{32} = -5$, $A_{33} = -6$. Тогда

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}, \quad AA^{-1} = A^{-1}A = E. \blacktriangleleft$$

Введем понятие ранга матрицы. Выделим в матрице A k строк и k столбцов, где k — число, меньшее или равное меньшему из чисел m и n. Определитель порядка k, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных k строк и k столбцов, называется *минором* или *определителем, порожденным матрицей* A. Например, для матрицы

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

при $k = 2$ определители

$$\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}$$

будут порожденными даниой матрицей.

Рангом матрицы A (обозначается $\operatorname{rang} A$) называется наибольший порядок порожденных ею определителей, отличных от нуля. Если равны нулю все определители порядка k, порожденные данной матрицей A, то $\operatorname{rang} A < k$.

Теорема 1. *Ранг матрицы не изменится, если:*

1) *поменять местами любые два параллельных ряда;*

2) *умножить каждый элемент ряда на один и тот же множитель* $\lambda \neq 0$;

3) *прибавить к элементам ряда соответствующие элементы любого другого параллельного ряда, умноженные на один и тот же множитель.*

Преобразования 1—3 называются *элементарными*. Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна матрица получается из другой с помощью элементарных преобразований. Эквивалентность матриц A и B обозначается $A \sim B$.

Базисным минором матрицы называется всякий отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу данной матрицы.

Рассмотрим *основные методы нахождения ранга матрицы.*

1. *Метод единиц и нулей.* С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к виду, когда каждый ее ряд будет состоять только из нулей или из нулей и одной единицы. Тогда число оставшихся едииц и определит ранг исходной матрицы, так как полученная матрица будет эквивалентна исходной.

Пример 2. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{bmatrix}.$$

▶ Умножим третий столбец матрицы A на $1/2$. Далее, полученную первую строку умножим на 2 н вычтем ее из четвертой строки. Теперь третий столбец содержит три нуля и единицу (в первой строке). Легко делаем нули в первой строке на первой, второй, четвертой и пятой позициях. Имеем

$$A\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Теперь четвертую строку последней матрицы складываем со второй и третьей, получая прн этом еще два нуля во втором столбце, после чего делаем нули в четвертой строке всюду, кроме единицы на пересечении четвертой строки и второго столбца. В результате этнх элементариых преобразований имеем:

$$A\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Получили три едииицы. Следовательно, $\operatorname{rang} A=3$.

За базисиый миирор можно взять, например, определитель третьего порядка, который находится на пересечеиии первой, третьей, четвертой строк и второго, третьего и четвертого столбцов (на пересечении этих строк и столбцов в последней матрице стоят единицы). Так как перестановка рядов матрицы ие производилась, то один из базисиых миноров матрицы A следующий:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}\neq 0. ◀$$

2. *Метод окаймляющих миноров.* Минор M_{k+1} порядка $k+1$, содержащий в себе минор M_k порядка k, называется *окаймляющим* миинор M_k. Если у матрицы A существует минор $M_k\neq 0$, а все окаймляющие его миноры $M_{k+1}=0$, то $\operatorname{rang} A=k$.

Пример 3. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -9 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

▶ Имеем $M_2=\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}\neq 0$. Для M_2 окаймляющими будут только два миинора:

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & -3 & 5\\ 2 & -6 & 4\\ 3 & -9 & 3\end{vmatrix},\quad M_3^*=\begin{vmatrix}-3 & 5 & 4\\ -6 & 4 & 3\\ -9 & 3 & 2\end{vmatrix},$$

каждый из которых равен нулю. Поэтому $\operatorname{rang} A=2$, а указанный минор M_2 может быть принят за базисный. ◀

Теорема 2 (Кронекера — Капелли). *Для того чтобы система m линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных x_1, x_2, ..., x_n*

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\} \tag{1.13}$$

была совместна (имела решение), необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix} \tag{1.14}$$

системы (1.13) и ранг так называемой расширенной матрицы

$$B=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} & b_1\\ A & b_2\\ & \vdots\\ & b_m\end{array}\right] \tag{1.15}$$

системы (1.13) были равны, т. е. $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} B=r$. *Далее, если* $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} B$ *и* $r=n$, *то система (1.13) имеет единственное решение; если* $r<n$, *то система (1.13) имеет бесконечное множество решений, зависящее от* $n-r$ *произвольных параметров.*

Система (1.13) называется *однородной*, если все ее свободные члены b_i $(i=\overline{1, m})$ равны нулю. Если хотя бы одно из чисел отлично от нуля, то система называется *неоднородной*. Для однородной системы уравнений $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} B$, поэтому она всегда совместна.

Пример 4. Выяснить, совместна ли система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1+3x_2-3x_3-\ \ x_4=4,\\ 3x_1-\ \ x_2+3x_3-2x_4=1,\\ 3x_1+\ \ x_2\qquad\ \ -\ \ x_4=0,\\ 5x_1+4x_2-2x_3+\ \ x_4=3. \end{array}\right\}$$

▶ Выпишем расширенную матрицу данной системы и найдем ранги основной и расширенной матриц. Имеем:

$$B=\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & -3 & -1 & 4\\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 5 & 4 & -2 & 1 & 3\end{array}\right].$$

Не будем переставлять столбец свободных членов с другими столбцами матрицы, чтобы сразу определить ранги основной и расширенной матриц. Второй столбец матрицы B умножим на 3 и вычтем из первого, а также сложим второй столбец с четвертым. В результате в третьей строке получим все нули, кроме единицы во втором столбце. Тогда легко можно обратить в нули все остальные элементы второго столбца. Получим

$$B \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} -5 & 0 & -3 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right].$$

Теперь вторую строку прибавим к первой и четвертой, а затем в полученной матрице первый столбец сложим с четвертым. Имеем:

$$B \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Далее третий столбец последней матрицы вычтем из четвертого, равного ему, и прибавим к первому. Полученный первый столбец, умноженный на 5, вычтем из пятого. Тогда

$$B \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 0 & -44 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Получили $\operatorname{rang} A = 3$, $\operatorname{rang} B = 4$, откуда $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} B$, т. е. исходная система уравнений несовместна. ◀

АЗ-1.3

1. Найти матрицу A^{-1}, обратную данной матрице A, если:

а) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(*Ответ:* а) $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -10 & -9 & 14 \\ 13 & 12 & -17 \\ -4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$;

б) $A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -7 & 3 & -13 & 41 \\ -13 & -3 & 8 & -16 \\ 18 & 3 & -3 & 6 \\ -3 & -3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.)

2. Найти ранг матрицы A с помощью элементарных преобразований или методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор, если:

а) $A=\begin{bmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$;

в) $A=\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

(*Ответ:* а) 2; б) 2; в) 3.)

3. Зная основную матрицу A и расширенную матрицу B, записать соответствующую им систему линейных алгебраических уравнений и решить вопрос о ее совместности или несовместности, пользуясь теоремой Кронекера — Капелли:

а) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 8 & -7 \end{bmatrix}$, $B=\left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ A & 2 \\ & 3 \end{array}\right]$;

б) $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\left[\begin{array}{c|c} & 6 \\ & 12 \\ A & -6 \\ & 3 \\ & 9 \end{array}\right]$.

(*Ответ:* а) $\operatorname{rang} A=2$, $\operatorname{rang} B=3$, т. е. система несовместна; б) $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} B=3$, т. е. система совместна.)

Самостоятельная работа

1. 1) Найти матрицу A^{-1}, обратную матрице

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{bmatrix};$$

2) найти ранг матрицы A с помощью элементарных преобразований и указать какой-либо ее базисный минор, если

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 15 & 7 & 11 \\ 11 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\textit{Ответ: } 1)\ A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{bmatrix};\ 2)\ \operatorname{rang} A=2.\right)$$

2. 1) Для матрицы A найти матрицу A^{-1} и убедиться, что $AA^{-1}=E$, если

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix};$$

2) найти ранг матрицы A и указать какой-либо ее базисный минор, если

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\textit{Ответ: } 1)\ A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix};\ 2)\ \operatorname{rang} A=2.\right)$$

3. 1) Найти матрицу A^{-1}, если

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix};$$

2) найти ранг матрицы A и указать какой-либо ее базисный минор, если

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\textit{Ответ:}\ 1)\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \end{bmatrix};\ 2)\ \operatorname{rang} A = 3. \right)$$

1.4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Матричный метод. Пусть для системы (1.13) $m = n$ и основная матрица A вида (1.14) — невырожденная, т. е. $\det A \neq 0$. Тогда для A существует единственная обратная матрица A^{-1}, определяемая формулой (1.11). Введем в рассмотрение матрицы-столбцы для неизвестных и свободных членов:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{1.16}$$

Тогда систему (1.13) можно записать в матричной форме: $AX = \tilde{B}$. Умножив это матричное уравнение слева на A^{-1}, получим $A^{-1}AX = A^{-1}\tilde{B}$, откуда $EX = X = A^{-1}\tilde{B}$. Следовательно, матрица-решение X легко находится как произведение A^{-1} и $\tilde{B}$.

Пример 1. Решить систему уравнений матричным методом:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 4y + z &= 3, \\ x - 5y + 3z &= -1, \\ x - y + z &= 1. \end{aligned}\right\}$$

▶ Имеем:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \det A = -8.$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

(см. пример 2 из § 1.3). Находим:

$$X = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2\cdot 3 + 3(-1) - 7\cdot 1 \\ 2\cdot 3 + 1(-1) - 5\cdot 1 \\ 4\cdot 3 - 2(-1) - 6\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -16 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

т. е. $x = 2$, $y = 0$, $z = -1$ — решение данной системы. ◀

Формулы Крамера. Если для системы (1.13) $m=n$ и $\det A \neq 0$, то верны *формулы Крамера* для вычисления неизвестных x_i $(i=\overline{1,\ n})$:

$$x_i = \Delta_n^{(i)}/\Delta_n \quad (i=\overline{1,\ n}), \tag{1.17}$$

где $\Delta_n = \det A$, а $\Delta_n^{(i)}$ являются определителями n-го порядка, которые получаются из Δ_n путем замены в нем i-го столбца столбцом свободных членов исходной системы.

Пример 2. Решить систему уравнений с помощью формул Крамера:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= -8, \\ 2x_2 + 7x_3 &= 17. \end{aligned}\right\}$$

▶ Вычислим

$$\Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 18 + 20 + 21 = 79.$$

Последовательно заменив в Δ_3 первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим:

$$\Delta_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 395, \quad x_1 = \frac{\Delta_3^{(1)}}{\Delta_3} = \frac{395}{79} = 5,$$

$$\Delta_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = -158, \quad x_2 = \frac{\Delta_3^{(2)}}{\Delta_3} = -\frac{158}{79} = -2,$$

$$\Delta_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 237, \quad x_3 = \frac{\Delta_3^{(3)}}{\Delta_3} = \frac{237}{79} = 3. \blacktriangleleft$$

Метод последовательных исключений Жордана — Гаусса. Если основная матрица A системы (1.13) имеет ранг $r \leqslant n$, то расширенная матрица B этой системы с помощью элементарных преобразований строк и перестановок столбцов всегда может быть приведена к виду

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{1r} & \tilde{a}_{1r+1} & \ldots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \ldots & \tilde{a}_{2r} & \tilde{a}_{2r+1} & \ldots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \tilde{a}_{rr+1} & \ldots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \tilde{b}_m \end{array}\right]. \tag{1.18}$$

Матрица (1.18) является расширенной матрицей системы

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{1r}x_r + \tilde{a}_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n &= \tilde{b}_1, \\ x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2r}x_r + \tilde{a}_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n &= \tilde{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} x_r + \tilde{a}_{r\,r+1}x_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{rn}x_n &= \tilde{b}_r, \\ 0 &= \tilde{b}_{r+1}, \\ \ldots\ldots\ldots & \\ 0 &= \tilde{b}_m, \end{aligned}\right\} \quad (1.19)$$

которая эквивалентна исходной системе (т. е. имеет те же самые решения, что и исходная система). Если хотя бы одно из чисел $\tilde{b}_{r+1}, \ldots, \tilde{b}_m$ отлично от нуля, то система (1.19) и, следовательно, исходная система (1.13) несовместны. Если же $\tilde{b}_{r+1} = \ldots = \tilde{b}_m = 0$, то система (1.13) совместна, а из системы (1.19) можно последовательно выразить в явном виде базисные неизвестные $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_2, x_1$ через свободные неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$, т. е. решить систему (1.13). Если $r = n$, то решение этой системы единственно.

Пример 3. С помощью метода последовательных исключений Жордана — Гаусса решить вопрос о совместности данной системы и в случае совместности решить ее:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 &= -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3. \end{aligned}\right\}$$

▶ Составим расширенную матрицу B и проведем необходимые элементарные преобразования строк:

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim -\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Последней матрице соответствует система, эквивалентная исходной:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_3 - x_4 &= 2, \\ x_4 &= -1. \end{aligned}\right\}$$

Из нее, двигаясь снизу вверх, последовательно находим: $x_4 = -1$, $x_3 = 2 + x_4 = 2 - 1 = 1$, $x_2 = -x_3 - x_4 = -1 + 1 = 0$, $x_1 = 1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 1 - 5 + 2 = -2$.

Итак, система совместна, ее решение единственно ($r=n=4$): $x_1 = -2$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=-1$. Проверкой легко убедиться в правильности найденного решения. ◀

Пример 4. Методом Жордана — Гаусса показать, что данная система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от двух параметров, и найти эти решения:

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3+x_4&=5,\\ x_2+x_3+x_4&=3,\\ x_1+\ x_2\qquad\qquad&=2.\end{aligned}\right\}$$

▶ Составляем расширенную матрицу системы B и находим $\operatorname{rang} A$ и $\operatorname{rang} B$ с помощью элементарных преобразований строк:

$$B=[A|\tilde{B}]=\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&5\\0&1&1&1&3\\1&1&0&0&2\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&5\\0&1&1&1&3\\0&-1&-1&-1&-3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&5\\0&1&1&1&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

Следовательно, $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} B=2<n=4$. Поэтому система совместна и имеет бесчисленное множество решений, зависящих от двух ($n-r=4-2=2$) параметров.

Последней матрице, эквивалентной данной матрице B, соответствует система уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3+x_4&=5,\\ x_2+x_3+x_4&=3,\end{aligned}\right\}$$

эквивалентная исходной. Так как $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1\neq0$, то в качестве базисных неизвестных берем x_1 и x_2, а x_3 и x_4 принимаем за свободные неизвестные (параметры). Тогда из второго уравнения последней системы имеем $x_2=3-x_3-x_4$. Подставив выражение для x_2 в первое уравнение, найдем

$$x_1=5-2(3-x_3-x_4)-x_3-x_4=-1+x_3+x_4. \ ◀$$

З а м е ч а н и е. За базисные неизвестные можно было бы принять также x_1, x_3, или x_1, x_4, или x_2, x_3, или x_2, x_4, но не x_3, x_4, так как определитель, составленный из коэффициентов при x_3 и x_4, равен нулю $\left(\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0\right)$, и поэтому x_3 и x_4 невозможно выразить через x_1 и x_2.

АЗ-1.4

1. Доказать совместность систем с помощью теоремы Кронекера — Капелли, записать системы в матричной форме и решить их матричным способом:

а) $\begin{cases}2x_1-x_2=-1,\\ x_1+2x_2-x_3=-2,\\ x_2+x_3=-2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=0,\\ x_1+2x_2+x_3=1,\\ x_2-x_3=-3.\end{cases}$

(*Ответ:* а) $x_1=x_2=x_3=-1$; б) $x_1=1, x_2=-1, x_3=2$.)

2. Решить системы уравнений, используя формулы Крамера:

$$\text{а)}\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=0,\\ 3x_2+4x_3=-6,\\ x_1+x_3=1;\end{cases}\quad \text{б)}\begin{cases}2x_1+3x_2+8x_4=0,\\ x_2-x_3+3x_4=0,\\ x_3+2x_4=1,\\ x_1+x_4=-24.\end{cases}$$

(*Ответ:* а) $x_1=1, x_2=-2, x_3=0$; б) $x_1=-19, x_2=26, x_3=11, x_4=-5$.)

3. Решить системы методом Жордана — Гаусса:

$$\text{а)}\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3-x_4=0,\\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4=0,\\ x_1-x_2+2x_3+5x_4=0;\end{cases}$$

$$\text{б)}\begin{cases}4x_1+2x_2-3x_3+2x_4=3,\\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4=2,\\ 3x_1+2x_2-3x_3+4x_4=1.\end{cases}$$

(*Ответ:* а) $x_1=14t, x_2=21t, x_3=x_4=t$ (t — любое число); б) $x_1=-10t+10$, $x_2=t$, $x_3=-16t+15$, $x_4=4-5t$ (t — любое число).)

4. Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить ее:

$$\left.\begin{aligned}2x_1+5x_2-8x_3&=8,\\ 4x_1+3x_2-9x_3&=9,\\ 2x_1+3x_2-5x_3&=7,\\ x_1+8x_2-7x_3&=12.\end{aligned}\right\}$$

(*Ответ:* $x_1=3, x_2=2, x_3=1$.)

5. Решить однородную систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}x_1+2x_2+4x_3-3x_4&=0,\\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4&=0,\\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4&=0,\\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4&=0.\end{aligned}\right\}$$

(*Ответ:* $x_1=8x_3-7x_4$, $x_2=-6x_3+5x_4$.)

Самостоятельная работа

1. Решить систему уравнений матричным способом и сделать проверку:

$$\left.\begin{aligned}2x_1-x_2+5x_3&=4,\\ 3x_1-x_2+5x_3&=0,\\ 5x_1+2x_2+13x_3&=2.\end{aligned}\right\}$$

2. Решить систему по формулам Крамера и сделать проверку:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= -2, \\ 2x_1 - x_2 \phantom{{}- x_3} &= -1, \\ x_2 + x_3 &= -2. \end{aligned}\right\}$$

3. Решить систему методом Жордана — Гаусса и сделать проверку:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= -22, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 12, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

1.5. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 1

ИДЗ-1.1

1. Для данного определителя Δ найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i2}, a_{3j}. Вычислить определитель Δ: а) разложив его по элементам i-й строки; б) разложив его по элементам j-го столбца; в) получив предварительно нули в i-й строке.

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$, $i=4$, $j=1$.

1.2. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$, $i=3$, $j=3$.

1.3. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$, $i=4$, $j=1$.

1.4. $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$, $i=1$, $j=3$.

1.5. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, $i=2$, $j=4$.

1.6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$, $i=1$, $j=2$.

1.7. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$, $i=2$, $j=3$.

1.8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, $i=3$, $j=1$.

1.9. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=3$.

1.10. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=2$.

1.11. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=4$.

1.12. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=2$.

1.13. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=4$.

1.14. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=4$.

1.15. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=3$.

1.16. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=2$.

1.17. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=1$.

1.18. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=4$.

1.19. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=3$.

1.20. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=3$.

1.21. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=2$.

1.22. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=2$.

1.23. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=4$. **1.24.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=2$.

1.25. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=3$. **1.26.** $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=1$.

1.27. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=4$. **1.28.** $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=2$.

1.29. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=4$. **1.30.** $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=2$.

2. Даны две матрицы A и B. Найти: а) AB; б) BA; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

2.1. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2.2. $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

2.3. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

2.4. $A=\begin{bmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

2.5. $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

2.6. $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

2.7. $A=\begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

2.8. $A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}$.

2.9. $A=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

2.10. $A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

2.11. $A=\begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

2.12. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}$.

2.13. $A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

2.14. $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

2.15. $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 0 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}$.

2.16. $A=\begin{bmatrix}5 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 4 & -5\\ 3 & -7 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$.

2.17. $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 7 & 0\\ 5 & 3 & 1\\ 1 & -6 & 1\end{bmatrix}$.

2.18. $A=\begin{bmatrix}8 & -1 & -1\\ 5 & -5 & -1\\ 10 & 3 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

2.19. $A=\begin{bmatrix}3 & -7 & 2\\ 1 & -8 & 3\\ 4 & -2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 5 & -3\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & -5\end{bmatrix}$.

2.20. $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & -7 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

2.21. $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -4\\ 4 & -9 & 3\\ 2 & -7 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 0 & -4\\ 5 & -6 & 4\\ 7 & -4 & 1\end{bmatrix}$.

2.22. $A=\begin{bmatrix}8 & 5 & -1\\ 1 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & -7 & -6\\ 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

2.23. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -4\\ 2 & 5 & -3\\ 4 & -3 & 2\end{bmatrix}$.

2.24. $A=\begin{bmatrix}5 & -8 & -4\\ 7 & 0 & -5\\ 4 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 5 & 5\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{bmatrix}$.

2.25. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & -5 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7 & 5 & 1\\ 5 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$.

2.26. $A=\begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

2.27. $A=\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2.28. $A=\begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2.29. $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

2.30. $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Решение типового варианта

1. Для данного определителя

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{12}, a_{32}. Вычислить определитель Δ_4: а) разложив его по элементам первой строки; б) разложив его по элементам второго столбца; в) получив предварительно нули в первой строке.

▶ Находим:

$$M_{12}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=-8-16+6+12+$$

$$+4-16=-18,$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=-12+12-12-8=-20.$$

Алгебраические дополнения элементов a_{12} и a_{32} соответственно равны:

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-(-18)=18,$$
$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-(-20)=20.$$

а) Вычислим

$$\Delta_4=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}=$$

$$=-3\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}=$$

$$=-3(8+2+4-4)-2(-8-16+6+12+4-16)+$$
$$+(16-12-4+32)=38;$$

б) Разложим определитель по элементам второго столбца:

$$\Delta_4=-2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=-2(-8+6-16+12+4-16)-2(12+6-$$
$$-6-16)+(-6+16-12-4)=38;$$

в) Вычислим Δ_4, получив предварительно нули в первой строке. Используем свойство 10 определителей (см. § 1.1). Умножим третий столбец определителя на 3 и прибавим к первому, затем умножим на -2 и прибавим ко второму. Тогда в первой строке все элементы, кроме одного, будут нулями. Разложим полученный таким образом определитель по элементам первой строки и вычислим его:

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -14 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}=$$

$$=-(-56+18)=38.$$

В определителе третьего порядка получили нули в первом столбце по свойству 10 определителей. ◀

2. Даны две матрицы:

$$A=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найти: а) AB; б) BA; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

▶ а) Произведение AB имеет смысл, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Находим матрицу $C=AB$, элементы которой $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$. Имеем:

$$C=AB=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -4+0-2 & -8+0+1 & 12+0+3 \\ 2-2-6 & 4+0+3 & -6-1+9 \\ 3+4-4 & 6+0+2 & -9+2+6 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -6 & -7 & 15 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix};$$

б) Вычислим

$$BA=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -4+4-9 & 0-2-6 & 1+6-6 \\ -8+0+3 & 0+0+2 & 2+0+2 \\ 8+2+9 & 0-1+6 & -2+3+6 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -9 & -8 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 19 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $AB \neq BA$;

в) Обратная матрица A^{-1} матрицы A имеет вид (см. формулу (1.11))

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix},$$

где

$$\det A=\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=8+4+3+24=39\neq 0,$$

т. е. матрица A — невырожденная, и, значит, существует матрица A^{-1}. Находим:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-8,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=5,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-11,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=14,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=8,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=4.$$

Тогда

$$A^{-1}=\frac{1}{39}\begin{bmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{8}{39} & -\frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ -\frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{bmatrix};$$

г) Имеем:

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=E;$$

д) Имеем:

$$A^{-1}A=\frac{1}{39}\begin{bmatrix}-8 & 2 & 1\\ 5 & -11 & 14\\ 7 & 8 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

т. е. обратная матрица найдена верно. ◀

ИДЗ-1.2

1. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

1.1. $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=7,\\ 2x_1+3x_2+x_3=1,\\ 3x_1+2x_2+x_3=6.\end{cases}$ **1.2.** $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=3,\\ x_1+x_2+2x_3=-4,\\ 4x_1+x_2+4x_3=-3.\end{cases}$

1.3. $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=12,\\ x_1+2x_2+4x_3=6,\\ 5x_1+x_2+2x_3=3.\end{cases}$ **1.4.** $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=-4,\\ x_1+3x_2-x_3=11,\\ x_1-2x_2+2x_3=-7.\end{cases}$

1.5. $\begin{cases}3x_1-2x_2+4x_3=12,\\ 3x_1+4x_2-2x_3=6,\\ 2x_1-x_2-x_3=-9.\end{cases}$

1.6. $\begin{cases}8x_1+3x_2-6x_3=-4,\\ x_1+x_2-x_3=2,\\ 4x_1+x_2-3x_3=-5.\end{cases}$

1.7. $\begin{cases}4x_1+x_2-3x_3=9,\\ x_1+x_2-x_3=-2,\\ 8x_1+3x_2-6x_3=12.\end{cases}$

1.8. $\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=33,\\ 7x_1-5x_2=24,\\ 4x_1+11x_3=39.\end{cases}$

1.9. $\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=12,\\ 7x_1-5x_2+x_3=-33,\\ 4x_1+x_3=-7.\end{cases}$

1.10. $\begin{cases}x_1+4x_2-x_3=6,\\ 5x_2+4x_3=-20,\\ 3x_1-2x_2+5x_3=-22.\end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - \ \ x_2 - \ \ x_3 = 10. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ \ \ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ \ \ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$ **1.14.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ \ \ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ \ \ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 - 3x_3 = -9, \\ \ \ x_1 + 5x_2 + \ \ x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ \ \ x_1 + 5x_2 + \ \ x_3 = -3. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ \ \ 3x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = -4, \\ \ \ \ \ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} \ \ 3x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ \ \ \ \ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} 3x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = -11, \\ 5x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = 8, \\ \ \ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} 3x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = 9, \\ 5x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = 11, \\ \ \ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 = 4, \\ 2x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = 1. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+\ \ x_3=12, \\ 2x_1+\ \ x_2+3x_3=16, \\ 3x_1+2x_2+\ \ x_3=8. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=14, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=-16, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=-8. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 2x_1-\ \ x_2-\ \ x_3=\ \ 4, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$

1.26. $\begin{cases} x_1+5x_2-6x_3=-15, \\ 3x_1+\ \ x_2+4x_3=13, \\ 2x_1-3x_2+\ \ x_3=9. \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} 4x_1-\ \ x_2 \qquad\ \ =-6, \\ 3x_1+2x_3+5x_3=-14, \\ x_1-3x_2+4x_3=-19. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} 5x_1+2x_2-4x_3=-16, \\ x_1 \qquad\ +3x_3=-6, \\ 2x_1-3x_2+\ \ x_3=9. \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} x_1+4x_2-\ \ x_3=-9, \\ 4x_1-\ \ x_2+5x_3=-2, \\ \qquad 3x_2-7x_3=-6. \end{cases}$

1.30. $\begin{cases} 7x_1+4x_2-\ \ x_3=13, \\ 3x_1+2x_2+3x_3=3, \\ 2x_1-3x_2+\ \ x_3=-10. \end{cases}$

2. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

2.1. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-4x_3=8, \\ 2x_1+4x_2-5x_3=11, \\ x_1-2x_2+\ \ x_3=1. \end{cases}$ 2.2. $\begin{cases} x_1+x_2+\ \ x_3=1, \\ x_1-x_2+2x_3=-5, \\ 2x_1 \qquad +3x_3=-2. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 2x_1-\ \ x_2+4x_3=15, \\ 3x_1-\ \ x_2+\ \ x_3=8, \\ 5x_1-2x_2+5x_3=0. \end{cases}$ 2.4. $\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3=2, \\ 4x_1-5x_2+2x_3=1, \\ x_1-2x_2 \qquad =5. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-4x_3=8, \\ 2x_1+4x_2-5x_3=1, \\ 5x_1+6x_2-9x_3=2. \end{cases}$ **2.6.** $\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=-3, \\ 2x_1+2x_2+5x_3=5, \\ 5x_1+3x_2+7x_3=1. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 4x_1-7x_2-2x_3=0, \\ 2x_1-3x_2-4x_3=6, \\ 2x_1-4x_2+2x_3=2. \end{cases}$ **2.8.** $\begin{cases} 5x_1-9x_2-4x_3=6, \\ x_1-7x_2-5x_3=1, \\ 4x_1-2x_2+x_3=2. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x_1-5x_2+x_3=3, \\ 3x_1+2x_2-x_3=7, \\ 4x_1-3x_2=1. \end{cases}$ **2.10.** $\begin{cases} 5x_1-5x_2-4x_3=-3, \\ x_1-x_2+5x_3=1, \\ 4x_1-4x_2-9x_3=0. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} 7x_1-2x_2-x_3=2, \\ 6x_1-4x_2-5x_3=3, \\ x_1+2x_2+4x_3=5. \end{cases}$ **2.12.** $\begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2-x_3=4, \\ 3x_1-4x_2+2x_3=2. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=1, \\ 2x_1+2x_2-3x_3=9, \\ x_1-x_2+x_3=2. \end{cases}$ **2.14.** $\begin{cases} 6x_1+3x_2-5x_3=0, \\ 9x_1+4x_2-7x_3=3, \\ 3x_1+x_2-2x_3=5. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} 8x_1-x_2+3x_3=2, \\ 4x_1+x_2+6x_3=1, \\ 4x_1-2x_2-3x_3=7. \end{cases}$ **2.16.** $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=5, \\ x_1+x_2+5x_3=6, \\ 3x_1+4x_2+9x_3=0. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} 2x_1-3x_2-4x_3=1, \\ 7x_1-9x_2-x_3=3, \\ 5x_1-6x_2+3x_3=7. \end{cases}$ **2.18.** $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3=2, \\ 2x_1+3x_2-x_3=9, \\ 3x_1+3x_2-x_3=1. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=6, \\ 5x_1-3x_2+2x_3=4, \\ -2x_1+5x_2-4x_3=0. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2, \\ 5x_1+x_2+3x_3=4, \\ 7x_1+2x_2+4x_3=1. \end{cases}$ **2.21.** $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=3, \\ x_1+3x_2-5x_3=0, \\ 2x_1+x_2-8x_3=4. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=0, \\ 3x_1-5x_2-6x_3=2, \\ 4x_1-9x_2-8x_3=1. \end{cases}$ **2.23.** $\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=1, \\ 3x_1+x_2-x_3=2, \\ x_1-2x_3=5. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} 3x_1-5x_2+3x_3=4, \\ x_1+2x_2+x_3=8, \\ 2x_1-7x_2+2x_3=1. \end{cases}$ **2.25.** $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=2, \\ 3x_1+x_2-x_3=5. \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} 5x_1-x_2-2x_3=1, \\ 3x_1-4x_2+x_3=7, \\ 2x_1+3x_2-3x_3=4. \end{cases}$ **2.27.** $\begin{cases} 2x_1+8x_2-7x_3=0, \\ 2x_1-5x_2+6x_3=1, \\ 4x_1+3x_2-x_3=7. \end{cases}$

$$2.28.\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3=2,\\x_1+5x_2-3x_3=4,\\2x_1-x_2+4x_3=5.\end{cases}\qquad 2.29.\begin{cases}2x_1-3x_2+2x_3=5,\\3x_1+4x_2-7x_3=2,\\5x_1+x_2-5x_3=9.\end{cases}$$

$$2.30.\begin{cases}4x_1-9x_2+5x_3=1,\\7x_1-4x_2+x_3=11,\\3x_1+5x_2-4x_3=5.\end{cases}$$

3. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

$$3.1.\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\2x_1-3x_2+4x_3=0,\\4x_1-11x_2+10x_3=0.\end{cases}\qquad 3.2.\begin{cases}3x_1-x_2+2x_3=0,\\x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+3x_2+3x_3=0.\end{cases}$$

$$3.3.\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=0,\\2x_1-x_2+3x_3=0,\\3x_1-5x_2+4x_3=0.\end{cases}\qquad 3.4.\begin{cases}4x_1-x_2+10x_3=0,\\x_1+2x_2-x_3=0,\\2x_1-3x_2+4x_3=0.\end{cases}$$

$$3.5.\begin{cases}2x_1+5x_2+x_3=0,\\4x_1+6x_2+3x_3=0,\\x_1-x_2-2x_3=0.\end{cases}\qquad 3.6.\begin{cases}3x_1-x_2-3x_3=0,\\2x_1+3x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+3x_3=0.\end{cases}$$

$$3.7.\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=0,\\2x_1+x_2-3x_3=0,\\3x_1+2x_3=0.\end{cases}\qquad 3.8.\begin{cases}2x_1-x_2-5x_3=0,\\x_1+2x_2-3x_3=0,\\5x_1+x_2+4x_3=0.\end{cases}$$

$$3.9.\begin{cases}5x_1-5x_2+4x_3=0,\\3x_1+x_2+3x_3=0,\\x_1+7x_2-x_3=0.\end{cases}\qquad 3.10.\begin{cases}x_1+3x_2-x_3=0,\\2x_1+5x_2-2x_3=0,\\x_1+x_2+5x_3=0.\end{cases}$$

$$3.11.\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=0,\\3x_1-x_2+2x_3=0,\\x_1+3x_2+4x_3=0.\end{cases}\qquad 3.12.\begin{cases}x_1-2x_2-x_3=0,\\2x_1+3x_2+2x_3=0,\\3x_1-2x_2+5x_3=0.\end{cases}$$

$$3.13.\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=0,\\3x_1-2x_2+4x_3=0,\\x_1-5x_2+3x_3=0.\end{cases}\qquad 3.14.\begin{cases}4x_1+x_2+3x_3=0,\\8x_1-x_2+7x_3=0,\\2x_1+4x_2-5x_3=0.\end{cases}$$

$$3.15.\begin{cases}x_1+4x_2-3x_3=0,\\2x_1+5x_2+x_3=0,\\x_1-7x_2+2x_3=0.\end{cases}\qquad 3.16.\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0,\\3x_1+x_2+2x_3=0,\\2x_1-3x_2+5x_3=0.\end{cases}$$

$$3.17.\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\2x_1-x_2-x_3=0,\\3x_1+3x_2+2x_3=0.\end{cases}\qquad 3.18.\begin{cases}3x_1+2x_2=0,\\x_1-x_2+2x_3=0,\\4x_1-2x_2+5x_3=0.\end{cases}$$

3.19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3.26. $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.27. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.28. $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.29. $\begin{cases} 8x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.30. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

4.1. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-5x_3=0, \\ 5x_1+x_2-4x_3=0. \end{cases}$ **4.12.** $\begin{cases} 5x_1+x_2+2x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 2x_1-x_2+x_3=0. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=0, \\ x_1-2x_2-4x_3=0, \\ 2x_1-9x_3=0. \end{cases}$ **4.14.** $\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3=0, \\ x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 2x_1-x_2+2x_3=0. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 5x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$ **4.16.** $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ x_1-3x_2+2x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=0. \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} x_1-3x_2-2x_3=0, \\ 3x_1-x_2+4x_3=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3=0. \end{cases}$ **4.18.** $\begin{cases} 5x_1+x_2-2x_3=0, \\ 3x_1-x_2+x_3=0, \\ 2x_1+2x_2-3x_3=0. \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0, \\ 5x_1-x_2-2x_3=0. \end{cases}$ **4.20.** $\begin{cases} 4x_1-x_2+5x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+2x_2+3x_3=0. \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=0, \\ 2x_1-3x_2-7x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-6x_3=0. \end{cases}$ **4.22.** $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=0, \\ x_1-5x_2+2x_3=0, \\ 4x_1-x_2+x_3=0. \end{cases}$

4.23. $\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3=0, \\ x_1-3x_2+2x_3=0, \\ 3x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$ **4.24.** $\begin{cases} 7x_1-6x_2-x_3=0, \\ 3x_1-3x_2+4x_3=0, \\ 4x_1-3x_2-5x_3=0. \end{cases}$

4.25. $\begin{cases} 5x_1-3x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+4x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-7x_2+5x_3=0. \end{cases}$ **4.26.** $\begin{cases} x_1-8x_2+7x_3=0, \\ 3x_1+5x_2-4x_3=0, \\ 4x_1-3x_2+3x_3=0. \end{cases}$

4.27. $\begin{cases} 5x_1+8x_2-5x_3=0, \\ 7x_1+5x_2-x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=0. \end{cases}$ **4.28.** $\begin{cases} 5x_1+x_2-6x_3=0, \\ 4x_1+3x_2-7x_3=0, \\ x_1-2x_2+x_3=0. \end{cases}$

4.29. $\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3=0, \\ 7x_1-5x_2+3x_3=0, \\ 5x_1-4x_2-x_3=0. \end{cases}$ **4.30.** $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=0, \\ 5x_1+4x_2-6x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=0. \end{cases}$

Решение типового варианта

1. Дана система линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1+5x_2-x_3&=3, \\ 2x_1+4x_2-3x_3&=2, \\ 3x_1-x_2-3x_3&=-7. \end{aligned}\right\}$$

Проверить, совместна ли эта система, и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

▶ Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера — Капелли. С помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

данной системы и ранг расширенной матрицы

$$B=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -3 & -7\end{array}\right].$$

Для этого умножим первую строку матрицы B на -2 и сложим со второй, затем умножим первую строку на -3 и сложим с третьей, поменяем местами второй и третий столбцы. Получим

$$B=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -3 & -7\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & -6 & -1 & -4\\ 0 & -16 & 0 & -16\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 5 & 3\\ 0 & -1 & -6 & -4\\ 0 & 0 & -16 & -16\end{array}\right].$$

Следовательно, $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} B=3$ (т. е. числу неизвестных). Значит, исходная система совместна и имеет единственное решение.

а) По формулам Крамера (1.17)

$$x_1=\Delta_3^{(1)}/\Delta_3,\ x_2=\Delta_3^{(2)}/\Delta_3,\ x_3=\Delta_3^{(3)}/\Delta_3,$$

где

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 5 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & -1 & -3\end{vmatrix}=-16;$$

$$\Delta_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 64;$$

$$\Delta_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 32,$$

находим: $x_1 = 64/(-16) = -4$, $x_2 = -16/(-16) = 1$, $x_3 = 32/(-16) = -2$;

б) Для нахождения решения системы с помощью обратной матрицы запишем систему уравнений в матричной форме $AX = \tilde{B}$. Решение системы в матричной форме имеет вид $x = A^{-1}\tilde{B}$. По формуле (1.11) находим обратную матрицу A^{-1} (она существует, так как $\Delta_3 = \det A = -16 \neq 0$):

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -15, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 16,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 16,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{bmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{bmatrix}.$$

Решение системы:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-16} \begin{bmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix}(-45+32+77)/(-16)\\(-9-7)/(-16)\\(-42+32+42)/(-16)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\1\\-2\end{bmatrix}.$$

Итак, $x_1=-4$, $x_2=1$, $x_3=-2$;

в) Решим систему методом Гаусса. Исключим x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого первое уравнение умножим на 2 и вычтем из второго, затем первое уравнение умножим на 3 и вычтем из третьего:

$$\left.\begin{aligned}x_1+5x_2-x_3&=3,\\-6x_2-x_3&=-4,\\-16x_2&=-16.\end{aligned}\right\}$$

Из полученной системы находим $x_1=-4$, $x_2=1$, $x_3=-2$. ◀

2. Дана система линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned}2x_1-3x_2+x_3&=2,\\3x_1+x_2-3x_3&=1,\\5x_1-2x_2-2x_3&=4.\end{aligned}\right\}$$

Проверить, совместна ли эта система, и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

▶ Проверяем совместность системы с помощью теоремы Кронекера — Капелли. В расширенной матрице

$$B=\left[\begin{array}{ccc|c}2&-3&1&2\\3&1&-3&1\\5&-2&-2&4\end{array}\right]$$

меняем третий и первый столбцы местами, умножаем первую строку на 3 и прибавляем ко второй, умножаем первую строку на 2 и прибавляем к третьей, из второй строки вычитаем третью:

$$B=\left[\begin{array}{ccc|c}2&-3&1&2\\3&1&-3&1\\5&-2&-2&4\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-3&2&2\\-3&1&3&1\\-2&-2&5&4\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-3&2&2\\0&-8&9&7\\0&-8&9&8\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-3&2&2\\0&-8&9&7\\0&0&0&1\end{array}\right].$$

Теперь ясно, что $\operatorname{rang} A=2$, $\operatorname{rang} B=3$. Согласно теореме Кронекера — Капелли, из того, что $\operatorname{rang} A \neq \neq \operatorname{rang} B$, следует несовместность исходной системы. ◀

3. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-4x_2+5x_3&=0,\\ x_1+2x_2-3x_3&=0,\\ 3x_1-x_2+2x_3&=0. \end{aligned}\right\}$$

▶ Определитель системы

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=11\neq 0,$$

поэтому система имеет единственное нулевое решение: $x_1=x_2=x_3=0$. ◀

4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+4x_2-x_3&=0,\\ x_1-3x_2+5x_3&=0,\\ 4x_1+x_2+4x_3&=0. \end{aligned}\right\}$$

▶ Так как

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1\\ 1 & -3 & 5\\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

то система имеет бесчисленное множество решений. Поскольку $\operatorname{rang} A=2$, $n=3$, возьмем любые два уравнения системы (например, первое и второе) и найдем ее решение. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+4x_2-x_3&=0,\\ x_1-3x_2+5x_3&=0. \end{aligned}\right\}$$

Так как определитель из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2 не равен нулю, то в качестве базисных неизвестных возьмем x_1 и x_2 (хотя можно брать и другие пары неизвестных) и переместим члены с x_3 в правые части уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+4x_2&=x_3,\\ x_1-3x_2&=-5x_3. \end{aligned}\right\}$$

Решаем последнюю систему по формулам Крамера (1.17):

$$x_1 = \Delta_2^{(1)}/\Delta_2, \quad x_2 = \Delta_2^{(2)}/\Delta_2,$$

где

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13;$$

$$\Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} x_3 & 4 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = -3x_3 + 20x_3 = 17x_3;$$

$$\Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -5x_3 \end{vmatrix} = -16x_3.$$

Отсюда находим, что $x_1 = -17x_3/13$, $x_2 = 16x_3/13$. Полагая $x_3 = 13k$, где k — произвольный коэффициент пропорциональности, получаем решение исходной системы: $x_1 = -17k$, $x_2 = 16k$, $x_3 = 13k$. ◀

1.6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 1

1. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

2. Вычислить определитель n-го порядка:

а) $$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1+a \end{vmatrix};$$

б) $$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix};$$

в) $\begin{vmatrix} a+1 & x & x & \dots & x & x \\ 1 & a & x & \dots & x & x \\ 1 & 0 & a & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a & x \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ b & x & 0 & \dots & 0 \\ b & 0 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 5 & 7 & -5 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

(*Ответ*: а) 1; б) $(x^{n+1}-1)(x-1)$; в) $a^n+(a-x)^{n-1}$; г) $x^n-(n-1)abx^{n-2}$; д) 42; е) 168.)

3. Решить данную систему уравнений при всех возможных значениях параметра t:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -7, \\ x + 2y - 6z &= t, \\ tx + 5y - 15z &= 8. \end{aligned}\right\}$$

(*Ответ*: при $t \neq -1$ и $t \neq 5$ система несовместна; если $t=5$, то $x=-9/5$, $y=(15a+17)/5$, $z=a$; если $t=-1$, то $x=-3$, $y=3a+1$, $z=a$, где a — произвольное число.)

4. При каких значениях λ однородная система уравнений

$$\left.\begin{aligned} -\lambda x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 0, \\ x_1 - \lambda x_2 + \dots + x_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots - \lambda x_n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

имеет ненулевые решения? (*Ответ*: $\lambda = n-1$, $\lambda=-1$.)

5. Показать, что если одна из квадратных матриц n-го порядка A и B — особенная, то их произведение AB — также особенная матрица.

6. Найти

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2 \quad \left(\text{Ответ: } \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}. \right)$$

7. Решить систему матричных уравнений

$$\left.\begin{aligned} X+\ \ Y&=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\\ 2X+3Y&=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}.\end{aligned}\right\}$$

$\left(\textit{Ответ}:\ X=\begin{bmatrix}2&3\\0&2\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}-1&-2\\0&-1\end{bmatrix}.\right)$

8. Установить число линейно независимых уравнений в данной системе и найти ее общее решение:

$$\left.\begin{aligned} x_1+\ x_2-\ x_3-2x_4-2x_5&=0,\\ 2x_1+3x_2-2x_3-5x_4-4x_5&=0,\\ x_1-\ x_2-\ x_3\qquad\ \ -2x_5&=0,\\ x_1-2x_2-\ x_3+\ x_4-2x_5&=0.\end{aligned}\right\}$$

(*Ответ*: $x_1=x_3+x_4+2x_5,\ x_2=x_4$.)

9. Привести к каноническому виду уравнение линии $x^2+y^2+3xy+x+4y=0$ и указать соответствующее преобразование системы координат. $\left(\textit{Ответ}:\ -\frac{5}{2}x'^2+\right.$ $\left.+\frac{1}{2}y'^2=1,\ x=-2+\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},\ y=1+\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}.\right)$

10. Убедиться, что линия, определяемая уравнением $9x^2-6xy+y^2-x-2y-14=0$, является параболой.

11. Доказать справедливость равенства

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\ \operatorname{tg}\alpha&\operatorname{tg}\beta&\operatorname{tg}\gamma\\ \operatorname{tg}^2\alpha&\operatorname{tg}^2\beta&\operatorname{tg}^2\gamma\end{vmatrix}=\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma}.$$

12. Решить уравнения:

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix}1&3&x\\4&5&-1\\2&-1&5\end{vmatrix}=0;\quad \text{б)}\ \begin{vmatrix}3&x&-4\\2&-1&3\\x+10&1&1\end{vmatrix}=0.$$

(*Ответ*: а) $=-3$; б) $x_1=-10,\ x_2=2$.)

13. Решить неравенства:

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix}3&-2&1\\1&x&-2\\-1&2&-1\end{vmatrix}<1;\quad \text{б)}\ \begin{vmatrix}2&x+2&-1\\1&1&-2\\5&-3&x\end{vmatrix}>0.$$

(*Ответ*: а) $x>3{,}5$; б) $-6<x<-4$.)

14. Доказать, что если система уравнений

$$\left.\begin{aligned}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,\\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0,\\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0\end{aligned}\right\}$$

совместна, то

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=0.$$

15. Исследовать данную систему уравнений и найти ее общее решение в зависимости от значения параметра λ:

$$\left.\begin{aligned}5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=3,\\ 4x_1-2x_2+3x_3+7x_4=1,\\ 3x_1-6x_2-x_3-5x_4=9,\\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=\lambda.\end{aligned}\right\}$$

(*Ответ*: при $\lambda\neq 0$ система несовместна; при $\lambda=0$ система совместна и ее общее решение: $x_1=(-5x_3-13x_4-$ $-3)/2$, $x_2=(-7x_3-19x_4-7)/2$.)

16. Указать, при каких λ данная система уравнений имеет решения или несовместна:

$$\left.\begin{aligned}\lambda x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=1,\\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=1,\\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=1.\end{aligned}\right\}$$

(*Ответ*: если $\lambda=-3$, то система несовместна; если $\lambda\neq 1$, $\lambda\neq -3$, то $x_1=x_2=x_3=x_4=1/(\lambda+3)$; если $\lambda=1$, то решения определяются одним уравнением $\sum\limits_{i=1}^{4} x_i=1$.)

17. Найти решения системы при всех значениях λ:

$$\left.\begin{aligned}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0.\end{aligned}\right\}$$

(*Ответ*: если $(\lambda+2)(\lambda-1)\neq 0$, то $x_1=x_2=x_3=0$; если $\lambda=-2$, то $x_1=x_2=x_3$; если $\lambda=1$, то решения определяются одним уравнением $x_1+x_2+x_3=0$.)

18. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы сумма двух решений системы линейных уравнений также была ее решением. (*Ответ*: однородность системы.)

19. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы произведение решения системы линейных уравнений и числа $\lambda \neq 1$ также было ее решением. (*Ответ*: однородность системы.)

20. При каком условии некоторая линейная комбинация любых решений данной неоднородной системы линейных уравнений будет решением этой системы? (*Ответ*: сумма коэффициентов линейной комбинации равна 1.)

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Вектором называется направленный отрезок. Если начало вектора находится в точке A, а конец — в точке B, то вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$. Если же начало и конец вектора не указываются, то его обозначают строчной буквой латинского алфавита $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ... На рисунке направление вектора изображается стрелкой (рис. 2.1).

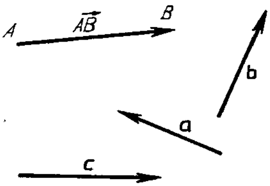


Рис. 2.1

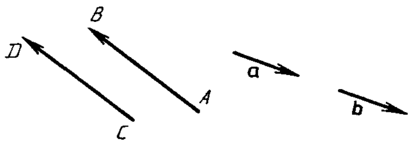


Рис. 2.2

Через $\overrightarrow{BA}$ обозначают вектор, направленный противоположно вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\mathbf{0}$. Его направление является неопределенным. Другими словами, такому вектору можно приписать любое направление. *Длиной* или *модулем вектора* называется расстояние между его началом и концом. Записи $|\overrightarrow{AB}|$ (или AB) и $|\mathbf{a}|$ (или a) обозначают модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{a}$ соответственно.

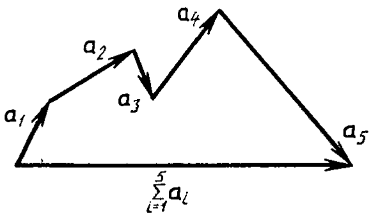
Векторы называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой, и *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине. На рис. 2.2 изображены пары равных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Из определения равенства векторов следует, что векторы можно переносить параллельно самим себе, не нарушая их равенства. Такие векторы называются *свободными*.

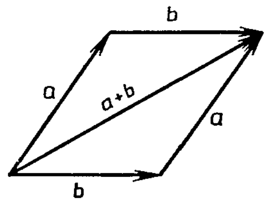
К линейным операциям над векторами относятся: умножение вектора на число и сложение векторов.

Произведением вектора $\mathbf{a}$ *и числа* α называется вектор, обозначаемый $\alpha\mathbf{a}$ (или $\mathbf{a}\alpha$), модуль которого равен $|\alpha||\mathbf{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$, если $\alpha > 0$, и противоположно ему, если $\alpha < 0$.

Суммой векторов $\mathbf{a}_i$ $(i=\overline{1,\ n})$ называется вектор, обозначаемый $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}_i$, начало которого находится в начале первого вектора $\mathbf{a}_1$, а конец — в конце последнего вектора $\mathbf{a}_n$ ломаной лннии, составленной нз последовательностн слагаемых векторов (рнс. 2.3). Это



Р и с. 2.3

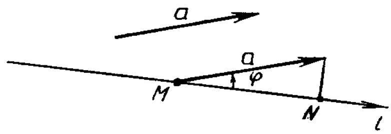


Р и с. 2.4

правнло сложения называется *правилом замыкания ломаной.* В случае суммы двух векторов оно равноснльно *правилу параллелограмма* (рнс. 2.4).

Прямая l с заданным на ней направлением, прннимаемым за положнтельное, называется *осью* l.

Проекцией вектора **a** *на ось* l называется чнсло, обозначаемое $\text{пр}_l\,\mathbf{a}$ и равное $|\mathbf{a}|\cos\varphi$, где φ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ — угол между положительным направлением оси l н направлением вектора **a**, т. е. по определению $\text{пр}_l\,\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\cos\varphi$. Геометрически проекцию вектора **a** можно охарактернзовать длиной отрезка MN, взятой со знаком «+», если $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, и со знаком «—», если $\pi/2<\varphi\leqslant\pi$ (рнс. 2.5). Прн $\varphi=\pi/2$ отрезок MN превращается в точку н $\text{пр}_l\,\mathbf{a}=0$.



Р и с. 2.5

Координатами вектора **a** называются его проекцин на осн коорднват Ox, Oy, Oz. Они обозначаются соответственно буквами x, y, z. Запнсь $\mathbf{a}=(x,\ y,\ z)$ означает, что вектор **a** нмеет координаты x, y, z.

Для равенства векторов необходнмо н достаточно, чтобы их соответствующие коорднваты былн равны. Если $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ н $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, то $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$.

Линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_i$ называется вектор **a**, определяемый по формуле $\mathbf{a}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathbf{a}_i$, где λ_i — некоторые числа. Если векторы $\mathbf{a}_i$ определиются коорднватамн x_i, y_i, z_i, то для коорднват вектора **a** имеем: $\mathbf{a}=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i\right)$.

Линейные операции над векторами удовлетворяют свойствам, по форме аналогичным свойствам умножения и сложения чисел. Например,

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a},\ (\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a},\ \alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b},$$
$$\mathbf{a}+(-1)\mathbf{a}=\mathbf{a}-\mathbf{a}=0,\ 1\mathbf{a}=\mathbf{a},\ 0\mathbf{a}=\mathbf{0}$$

и т. д.

Если для системы n векторов $\mathbf{a}_i$ равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \qquad (2.1)$$

верно только в случае, когда $\lambda_i = 0$, то эта система называется *линейно независимой*. Если же равенство (2.1) выполняется для λ_i, хотя бы одно из которых отлично от нуля, то система векторов $\mathbf{a}_i$ называется *линейно зависимой*. Например, любые коллинеарные векторы, три компланарных вектора, четыре и более векторов в трехмерном пространстве всегда линейно зависимы.

Три упорядоченных линейно независимых вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в пространстве называются *базисом*. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов всегда образует базис. Любой вектор $\mathbf{a}$ в пространстве можно разложить по базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, т. е. представить $\mathbf{a}$ в виде линейной комбинации базисных векторов: $\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$, где x, y, z являются координатами вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Базис называется *ортонормированным*, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Обозначают такой базис $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Пример 1. Даны векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (рис. 2.6, *а*). Изобразить на рисунке их линейную комбинацию $-2\mathbf{a}+\frac{1}{3}\mathbf{b}+4\mathbf{c}$.

▶ Выбираем на плоскости произвольную точку O и откладываем от нее вектор $-2\mathbf{a}$ (рис. 2.6, б). Затем от конца вектора $-2\mathbf{a}$ откладываем

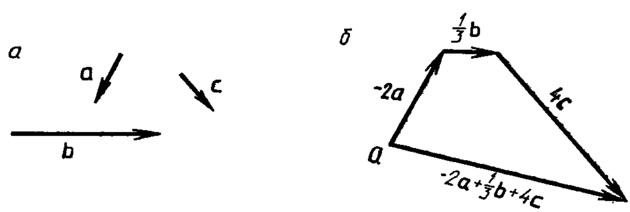


Рис. 2.6

вектор $\frac{1}{3}\mathbf{b}$ и, наконец, строим вектор $4\mathbf{c}$, выходящий из конца вектора $\frac{1}{3}\mathbf{b}$. Искомая линейная комбинация изображается вектором, замыкающим полученную ломаную, начало которого находится в точке O. ◀

Пример 2. Векторы заданы в ортонормированном базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ координатами: $\mathbf{a}=(2,\ -1,\ 8)$, $\mathbf{e}_1=(1,\ 2,\ 3)$, $\mathbf{e}_2=(1,\ -1,\ -2)$, $\mathbf{e}_3=(1,\ -6,\ 0)$. Убедиться, что тройка $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ образует базис, и найти координаты вектора $\mathbf{a}$ в этом базисе.

▶ Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix},$$

составленный из коордннат векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, не равен 0, то векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ линейно независнмы и, следовательно, образуют базис. Убеждаемся, что $\Delta = -6 - 4 + 3 - 12 = -19 \neq 0$. Такнм образом, тройка $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — базис.

Обозначим координаты вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ через x, y, z. Тогда $\mathbf{a} = (x, y, z) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$. Так как по условию $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, то из равенства $\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ следует, что $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 8\mathbf{k} = x\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 3x\mathbf{k} + y\mathbf{i} - y\mathbf{j} - 2y\mathbf{k} + z\mathbf{i} - 6z\mathbf{j} = (x + y + z)\mathbf{i} + (2x - y - 6z)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}$. Как видно, вектор в левой части полученного равенства равен вектору в правой его части, а это возможно только в случае равенства их соответствующих координат. Отсюда получаем систему для нахождения нензвестных x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2, \\ 2x - y - 6z &= -1, \\ 3x - 2y \quad &= 8. \end{aligned}\right\}$$

Ее решенне: $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$.

Итак, $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = (2, -1, 1)$. ◀

АЗ-2.1

1. По данным векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ построить следующие их линейные комбинации: а) $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$; б) $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$; в) $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$; г) $-3\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$.

2. Векторы $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$ служат сторонами треугольника ABC. Выразить через $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$, совпадающие с медианами треугольника ABC. $\Big($*Ответ*: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{c}$ или $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{b})$, $\overrightarrow{BN} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$ или $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{c})$, $\overrightarrow{CP} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$ или $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.$\Big)$

3. В треугольной пирамиде $SABC$ известны векторы $\overrightarrow{SA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{SB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{SC} = \mathbf{c}$. Найти вектор $\overrightarrow{SO}$, если точка O является центром масс треугольника ABC. $\Big($*Ответ:* $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$.$\Big)$

4. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, длины оснований AD и BC которой соответственно равны 4 и 2, а угол D равен 45°. Найти проекции векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ на ось l, определяемую вектором $\overrightarrow{CD}$. (*Ответ*: $\text{пр}_l\overrightarrow{AD} = 2\sqrt{2}$, $\text{пр}_l\overrightarrow{AB} = -\sqrt{2}$, $\text{пр}_l\overrightarrow{BC} = \sqrt{2}$, $\text{пр}_l\overrightarrow{AC} = 0$.)

5. Вектор $\mathbf{a}$ составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$. Вычислить его координаты, если $|\mathbf{a}| = 2$. (*Ответ*: $\mathbf{a} = (1, -1, \sqrt{2})$ или $\mathbf{a} = (1, -1, -\sqrt{2})$.)

6. Даны векторы $\mathbf{a} = (3, -2, 6)$ и $\mathbf{b} = (-2, 1, 0)$. Найти координаты векторов: $2\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b}$; $\frac{1}{3}\mathbf{a} - \mathbf{b}$; $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$. (*Ответ*: $(20/3, -13/3, 12)$; $(3, -5/3, 2)$; $(0, -1, 12)$.)

7. Найти координаты единичного вектора $\mathbf{e}$, направленного по биссектрисе угла, образуемого векторами $\mathbf{a} = (2, -3, 6)$ и $\mathbf{b} = (-1, 2, -2)$. $\left(\text{Ответ: } \mathbf{e} = \left(-\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}}\right).\right)$

8. В некотором базисе векторы заданы координатами: $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{e}_1 = (2, 2, -1)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 4, 8)$, $\mathbf{e}_3 = (-1, -1, 3)$. Убедиться, что векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ образуют базис, и найти в нем координаты вектора $\mathbf{a}$. (*Ответ:* $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$.)

Самостоятельная работа

1. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3, -5, 8)$ и $\mathbf{b} = (-1, 1, -4)$. (*Ответ:* $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 6$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 14$.)

2. Векторы $\overrightarrow{AB} = (2, 6, -4)$ и $\overrightarrow{AC} = (4, 2, -2)$ определяют стороны треугольника ABC. Найти длину вектора $\overrightarrow{CD}$, совпадающего с медианой, проведенной из вершины C. (*Ответ*: $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{10}$.)

3. Найти координаты вектора $\mathbf{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\mathbf{a} = (-3, 0, 4)$ и $\mathbf{b} = (5, 2, 14)$. (*Ответ*: $\mathbf{c} = \lambda(-2, 1, 13)$, $\lambda > 0$.)

2.2. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2, называется число λ, удовлетворяющее равенству $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$. Связь между координатами делящей точки $M(x, y, z)$, точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и числом λ задается равенствами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Деление отрезка M_1M_2 будет *внутренним*, если $\lambda>0$, и *внешним*, если $\lambda<0$. При $\lambda=1$ точка M будет серединой отрезка M_1M_2, $\lambda\neq-1$.

Пример 1. Концы однородного стержня находятся в точках $M_1(3, -5, 8)$ и $M_2(7, 13, -6)$. Найти координаты центра масс стержня.

▶ Центр масс $C(x, y, z)$ однородного стержня находится в его середине. Поэтому $\lambda=1$ и

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+7}{2}=5,\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-5+13}{2}=4,$$

$$z=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{8-6}{2}=1. ◀$$

Скалярным произведением двух векторов **a** *и* **b** называется число, обозначаемое $\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ и равное произведению модулей данных векторов на косинус угла между ними:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}),$$

где $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ обозначает меньший угол между направлениями векторов **a** и **b**. Отметим, что всегда $0\leqslant(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})\leqslant\pi$.

Перечислим *основные свойства скалярного произведения векторов:*

1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$;
2) $(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b})$;
3) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$;
4) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\,\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}=|\mathbf{b}|\,\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$;
5) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2$;
6) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0\Leftrightarrow\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

Если $\mathbf{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b}=(x_2, y_2, z_2)$, то в базисе **i**, **j**, **k**:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2},\quad |\mathbf{b}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.$$

Обозначим через α, β, γ углы, которые образует вектор $\mathbf{a}=(x_1, y_1, z_1)$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно (или, что то же самое, с векторами **i**, **j**, **k**). Тогда справедливы следующие формулы:

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{a}|}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},\quad \cos\beta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}}{|\mathbf{a}|}=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{a}|}=\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},\quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* **a**.

Работа A силы **F**, произведенная этой силой при перемещении тела на пути $|\mathbf{s}|$, определяемом вектором **s**, вычисляется по формуле

$$A=\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}=|\mathbf{F}||\mathbf{s}|\cos(\widehat{\mathbf{F}, \mathbf{s}}).$$

Пример 2. Вычислить работу равнодействующей $\mathbf{F}$ сил $\mathbf{F}_1 = (3, -4, 5)$, $\mathbf{F}_2 = (2, 1, -4)$, $\mathbf{F}_3 = (-1, 6, 2)$, приложенных к материальной точке, которая под их действием перемещается прямолинейно из точки $M_1(4, 2, -3)$ в точку $M_2(7, 4, 1)$.

▶ Так как $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = (4, 3, 3)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{s} = (3, 2, 4)$, то $A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 30$. ◀

АЗ-2.2

1. Даны две вершины $A(2, -3, -5)$, $B(-1, 3, 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $E(4, -1, 7)$. Найти координаты остальных вершин параллелограмма. (*Ответ*: $C(6, 1, 19)$, $D(9, -5, 12)$.)

2. Отрезок, ограниченный точками $A(-1, 8, -3)$ и $B(9, -7, -2)$, разделен точками M_1, M_2, M_3, M_4 на пять равных частей. Найти координаты точек M_1 и M_3. (*Ответ*: $M_1(1, 5, -2)$, $M_3(5, -1, 0)$.)

3. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $C(2, 0, 2)$ и $D(5, -2, 0)$ разделен на три равные части. (*Ответ*: $A(-1, 2, 4)$, $B(8, -4, -2)$.)

4. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол $\varphi = 2\pi/3$, и $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$. Вычислить: $\mathbf{a}^2$; $\mathbf{b}^2$; $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$; $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$; $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$. (*Ответ*: 9; 16; 13; 37; -61.)

5. Даны векторы $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, для которых $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 60°$. Вычислить угол φ между медианой $\overrightarrow{OM}$ и стороной $\overrightarrow{OA}$ треугольника AOB. (*Ответ*: $\cos\varphi = 2/\sqrt{7}$, $\varphi \approx 41°$.)

6. Определить работу силы $\mathbf{F}$, $|\mathbf{F}| = 15$ Н, которая, действуя на тело, вызывает его перемещение на 4 м под углом $\pi/3$ к направлению действия силы. (*Ответ*: 30 Дж.)

7. Даны векторы $\mathbf{a} = (4, -2, -4)$, $\mathbf{b} = (6, -3, 2)$. Вычислить: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; $\mathbf{a}^2$; $\mathbf{b}^2$; $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$; $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$; $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$. (*Ответ*: 22; 36; 49; 129; 41; -200.)

8. Даны вершины треугольника ABC: $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$. Вычислить внешний угол при вершине B. (*Ответ*: $3\pi/4$.)

9. Под действием силы $\mathbf{F} = (5, 4, 3)$ тело переместилось из начала вектора $\mathbf{s} = (2, 1, -2)$ в его конец. Вычислить работу A силы $\mathbf{F}$ и угол φ между направлениями силы и перемещения. (*Ответ*: $A = 8$, $\cos\varphi \approx 0{,}38$, $\varphi \approx 1{,}18$ рад или $\varphi \approx 67°40'$.)

Самостоятельиая работа

1. Даны вершины четырехугольника $A(1,\ -2,\ 2)$, $B(1,\ 4,\ 0)$, $C(-4,\ 1,\ 1)$, $D(-5,\ -5,\ 3)$. Вычислить угол φ между его диагоналями. (*Ответ*: $\varphi = 90°$.)

2. При каком значении α векторы $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \alpha\mathbf{k}$ взаимно перпендикулярны? (*Ответ*: $\alpha = -6$.)

3. Найти координаты вектора $\mathbf{b}$, коллинеарного вектору $\mathbf{a} = (2,\ 1,\ -1)$, при условии $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3$. (*Ответ*: $\mathbf{b} = (1,\ 1/2,\ -1/2)$.)

2.3. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ с общим началом в точке O называется *правой*, если кратчайший поворот от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ наблюдается из конца вектора $\mathbf{c}$ происходящим против движения часовой стрелки (рис. 2.7, *а*). В противном случае данная тройка называется *левой* (рис. 2.7, *б*).

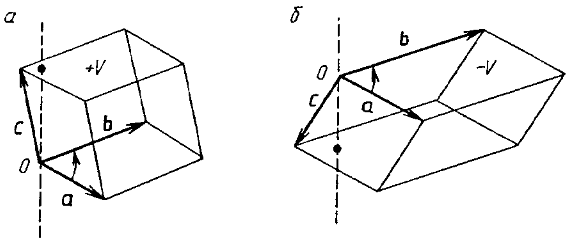


Рис. 2.7

Векторным произведением векторов $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$, обозначаемый $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$;
2) $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$;
3) тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — правая (рис. 2.8).

Перечислим *основные свойства векторного произведения векторов*:
1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$;
2) $(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$;
3) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$;
4) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$;
5) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = S$, где S — площадь параллелограмма, построенного иа векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, имеющих общее начало в точке O (см. рис. 2.8).

Если $\mathbf{a} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2,\ y_2,\ z_2)$, то векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ выражается через координаты данных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ следующим образом:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right).$$

С помощью векторного произведения можно вычислить *вращающий момент* $\mathbf{M}$ *силы* $\mathbf{F}$, *приложенной к точке* B *тела, закрепленного в точке* A: $\mathbf{M}=\overrightarrow{AB}\times\mathbf{F}$ (рис. 2.9).

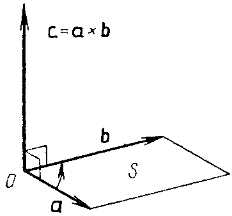


Рис. 2.8

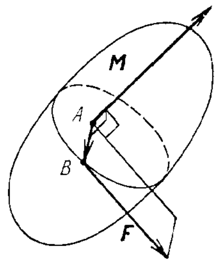


Рис. 2.9

Пример 1. Вычислить координаты вращающего момента $\mathbf{M}$ силы $\mathbf{F}=(3,\ 2,\ 1)$, приложенной к точке $A(-1,\ 2,\ 4)$, относительно начала координат O.

▶ Имеем

$$\mathbf{M}=\overrightarrow{OA}\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-6,\ 13,\ -8).\ ◀$$

Смешанным произведением векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется число $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$.

Перечислим *основные свойства смешанного произведения векторов:*

1) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, поэтому смешанное произведение можно обозначать проще: $\mathbf{abc}$;

2) $\mathbf{abc}=\mathbf{bca}=\mathbf{cab}=-\mathbf{bac}=-\mathbf{cba}=-\mathbf{acb}$;

3) геометрический смысл смешанного произведения заключается в следующем: $\mathbf{abc}=\pm V$, где V — объем параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах, взятый со знаком «+», если тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — правая, или со знаком «—», если она левая (см. рис. 2.7);

4) $\mathbf{abc}=0\Leftrightarrow\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны.

Если $\mathbf{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathbf{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $\mathbf{c}=(x_3,\ y_3,\ z_3)$, то

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Пример 2. Даны векторы $\mathbf{a}=(1,\ 3,\ 1)$, $\mathbf{b}=(-2,\ 4,\ -1)$, $\mathbf{c}=(2,\ 4,\ -6)$. Требуется установить, компланарны ли данные векторы, в случае их некомпланарности выяснить, какую тройку (правую или левую) они образуют, и вычислить объем построенного на них параллелепипеда.

▶ Вычислим

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix}=-78.$$

Из значения смешанного произведения следует, что векторы некомпланарны, образуют левую тройку и $V=78$. ◀

АЗ-2.3

1. Векторы **a** и **b** взаимно перпендикулярны, $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=4$. Вычислить: $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$; $|(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})|$; $|(3\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-2\mathbf{b})|$. (*Ответ:* 12; 24; 60.)

2. Даны векторы $\mathbf{a}=(3,\ -1,\ -2)$, $\mathbf{b}=(1,\ 2,\ -1)$. Найти координаты векторов: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$; $(2\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{b}$; $(2\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(2\mathbf{a}+\mathbf{b})$. (*Ответ:* (5, 1, 7); (10, 2, 14); (20, 4, 28).)

3. Вычислить площадь треугольника ABC, если известно, что: $A(1,\ 2,\ 0)$, $B(3,\ 0,\ 3)$, $C(5,\ 2,\ 6)$. (*Ответ:* $2\sqrt{13}$.)

4. Сила $\mathbf{F}=(2,\ 2,\ 9)$ приложена к точке $A(4,\ 2,\ -3)$. Вычислить величину и направляющие косинусы момента M этой силы относительно точки $B(2,\ 4,\ 0)$. (*Ответ:* $|\mathbf{M}|=28$, $\cos\alpha=3/7$, $\cos\beta=6/7$, $\cos\gamma=-2/7$.)

5. Даны вершины пирамиды $A(2,\ 0,\ 4)$, $B(0,\ 3,\ 7)$, $C(0,\ 0,\ 6)$, $S(4,\ 3,\ 5)$. Вычислить ее объем V и высоту H, опущенную на грань ACS. (*Ответ:* $V=2$, $H=2/\sqrt{3}$.)

6. Лежат ли точки $A(1,\ 2,\ -1)$, $B(4,\ 1,\ 5)$, $C(-1,\ 2,\ 1)$, $D(2,\ 1,\ 3)$ в одной плоскости? (*Ответ:* лежат.)

7. Компланарны ли следующие векторы: а) $\mathbf{a}=(2, 3, 1)$, $\mathbf{b}=(1,\ -1,\ 3)$, $\mathbf{c}=(-1,\ 9,\ -11)$; б) $\mathbf{a}=(3,\ -2,\ 1)$, $\mathbf{b}=(2,\ 1,\ 2)$, $\mathbf{c}=(3,\ -1,\ -2)$? (*Ответ:* а) компланарны; б) не компланарны.)

8. Выяснить, правой или левой будет тройка векторов $\mathbf{a}=(3,\ 4,\ 0)$, $\mathbf{b}=(0,\ -4,\ 1)$, $\mathbf{c}=(0,\ 2,\ 5)$. (*Ответ:* левой.)

Самостоятельная работа

1. 1) Дано: $|\mathbf{a}|=10$, $|\mathbf{b}|=2$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=12$. Вычислить $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ (Ответ: 16.)

2) Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}=(0,\ -1,\ 1)$ и $\mathbf{b}=(1,\ 1,\ 1)$. (*Ответ:* 6.)

2. Сила $\mathbf{F}=(3,\ 2,\ -4)$ приложена к точке $A(2,\ -1,\ 1)$. Найти вращающий момент **M** этой силы относительно начала координат. (*Ответ:* $\mathbf{M}=(2,\ 11,\ 7)$.)

3. Вычислить объем V треугольной призмы, построенной на векторах $\mathbf{a}=(7, 6, 1)$, $\mathbf{b}=(4, 0, 3)$, $\mathbf{c}=(3, 6, 4)$. (*Ответ*: $V=24$.)

2.4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 2

ИДЗ-2.1

1. Даны векторы $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{m}+\beta\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}=\gamma\mathbf{m}+\delta\mathbf{n}$, где $|\mathbf{m}|=k$; $|\mathbf{n}|=l$; $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}})=\varphi$. Найти: а) $(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})\cdot(\nu\mathbf{a}+\tau\mathbf{b})$; б) $\text{пр}_{\mathbf{b}}(\nu\mathbf{a}+\tau\mathbf{b})$; в) $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \tau\mathbf{b}})$.

1.1. $\alpha=-5$, $\beta=-4$, $\gamma=3$, $\delta=6$, $k=3$, $l=5$, $\varphi=5\pi/3$, $\lambda=-2$, $\mu=1/3$, $\nu=1$, $\tau=2$. (*Ответ*: а) 2834.)

1.2. $\alpha=-2$, $\beta=3$, $\gamma=4$, $\delta=-1$, $k=1$, $l=3$, $\varphi=\pi$, $\lambda=3$, $\mu=2$, $\nu=-2$, $\tau=4$. (*Ответ*: а) -950.)

1.3. $\alpha=5$, $\beta=-2$, $\gamma=-3$, $\delta=-1$, $k=4$, $l=5$, $\varphi=4\pi/3$, $\lambda=2$, $\mu=3$, $\nu=-1$, $\tau=5$. (*Ответ*: а) -1165.)

1.4. $\alpha=5$, $\beta=2$, $\gamma=-6$, $\delta=-4$, $k=3$, $l=2$, $\varphi=5\pi/3$, $\lambda=-1$, $\mu=1/2$, $\nu=2$, $\tau=3$. (*Ответ*: а) 416.)

1.5. $\alpha=3$, $\beta=-2$, $\gamma=-4$, $\delta=5$, $k=2$, $l=3$, $\varphi=\pi/3$, $\lambda=2$, $\mu=-3$, $\nu=5$, $\tau=1$. (*Ответ*: а) 750.)

1.6. $\alpha=2$, $\beta=-5$, $\gamma=-3$, $\delta=4$, $k=2$, $l=4$, $\varphi=2\pi/3$, $\lambda=3$, $\mu=-4$, $\nu=2$, $\tau=3$. (*Ответ*: а) -2116.)

1.7. $\alpha=3$, $\beta=2$, $\gamma=-4$, $\delta=-2$, $k=2$, $l=5$, $\varphi=4\pi/3$, $\lambda=1$, $\mu=-3$, $\nu=0$, $\tau=-1/2$. (*Ответ*: а) 165.)

1.8. $\alpha=5$, $\beta=2$, $\gamma=1$, $\delta=-4$, $k=3$, $l=2$, $\varphi=\pi$, $\lambda=1$, $\mu=-2$, $\nu=3$, $\tau=-4$. (*Ответ*: а) -583.)

1.9. $\alpha=-3$, $\beta=-2$, $\gamma=1$, $\delta=5$, $k=3$, $l=6$, $\varphi=4\pi/3$, $\lambda=-1$, $\mu=2$, $\nu=1$, $\tau=1$. (*Ответ*: а) 1287.)

1.10. $\alpha=5$, $\beta=-3$, $\gamma=4$, $\delta=2$, $k=4$, $l=1$, $\varphi=2\pi/3$, $\lambda=2$, $\mu=-1/2$, $\nu=3$, $\tau=0$. (*Ответ*: а) 2337.)

1.11. $\alpha=-2$, $\beta=3$, $\gamma=3$, $\delta=-6$, $k=6$, $l=3$, $\varphi=5\pi/3$, $\lambda=3$, $\mu=-1/3$, $\nu=1$, $\tau=2$. (*Ответ*: а) -936.)

1.12. $\alpha=-2$, $\beta=-4$, $\gamma=3$, $\delta=1$, $k=3$, $l=2$, $\varphi=7\pi/3$, $\lambda=-1/2$, $\mu=3$, $\nu=1$, $\tau=2$. (*Ответ*: а) 320.)

1.13. $\alpha=4$, $\beta=3$, $\gamma=-1$, $\delta=2$, $k=4$, $l=5$, $\varphi=3\pi/2$, $\lambda=2$, $\mu=-3$, $\nu=1$, $\tau=2$. (*Ответ*: а) 352.)

1.14. $\alpha=-2$, $\beta=3$, $\gamma=5$, $\delta=1$, $k=2$, $l=5$, $\varphi=2\pi$, $\lambda=-3$, $\mu=4$, $\nu=2$, $\tau=3$. (*Ответ*: а) 1809.)

1.15. $\alpha=4$, $\beta=-3$, $\gamma=5$, $\delta=2$, $k=4$, $l=7$, $\varphi=4\pi/3$, $\lambda=-3$, $\mu=2$, $\nu=2$, $\tau=-1$.. (*Ответ*: а) -5962.)

1.16. $\alpha = -5$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $\delta = 4$, $k = 5$, $l = 4$, $\varphi = \pi$, $\lambda = -3$, $\mu = 1/2$, $\nu = -1$, $\tau = 1$. (*Ответ*: а) 3348.)

1.17. $\alpha = 5$, $\beta = -2$, $\gamma = 3$, $\delta = 4$, $k = 2$, $l = 5$, $\varphi = \pi/2$, $\lambda = 2$, $\mu = 3$, $\nu = 1$, $\tau = -2$. (*Ответ*: а) -2076.)

1.18. $\alpha = 7$, $\beta = -3$, $\gamma = 2$, $\delta = 6$, $k = 3$, $l = 4$, $\varphi = 5\pi/3$, $\lambda = 3$, $\mu = -1/2$, $\nu = 2$, $\tau = 1$. (*Ответ*: а) 1728.)

1.19. $\alpha = 4$, $\beta = -5$, $\gamma = -1$, $\delta = 3$, $k = 6$, $l = 3$, $\varphi = 2\pi/3$, $\lambda = 2$, $\mu = -5$, $\nu = 1$, $\tau = 2$. (*Ответ*: а) 1044.)

1.20. $\alpha = 3$, $\beta = -5$, $\gamma = -2$, $\delta = 3$, $k = 1$, $l = 6$, $\varphi = 3\pi/2$, $\lambda = 4$, $\mu = 5$, $\nu = 1$, $\tau = -2$. (*Ответ*: а) 1994.)

1.21. $\alpha = -5$, $\beta = -6$, $\gamma = 2$, $\delta = 7$, $k = 2$, $l = 7$, $\varphi = \pi$, $\lambda = -2$, $\mu = 5$, $\nu = 1$, $\tau = 3$. (*Ответ*: а) 29 767.)

1.22. $\alpha = -7$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$, $\delta = 6$, $k = 2$, $l = 9$, $\varphi = \pi/3$, $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\nu = -1$, $\tau = 3$. (*Ответ*: а) 20 758.)

1.23. $\alpha = 5$, $\beta = 4$, $\gamma = -6$, $\delta = 2$, $k = 2$, $l = 9$, $\varphi = 2\pi/3$, $\lambda = 3$, $\mu = 2$, $\nu = 1$, $\tau = -1/2$. (*Ответ*: а) 2751.)

1.24. $\alpha = -5$, $\beta = -7$, $\gamma = -3$, $\delta = 2$, $k = 2$, $l = 11$, $\varphi = 3\pi/2$, $\lambda = -3$, $\mu = 4$, $\nu = -1$, $\tau = 2$. (*Ответ*: а) 38 587.)

1.25. $\alpha = 5$, $\beta = -8$, $\gamma = -2$, $\delta = 3$, $k = 4$, $l = 3$, $\varphi = 4\pi/3$, $\lambda = 2$, $\mu = -3$, $\nu = 1$, $\tau = 2$. (*Ответ*: а) 1048.)

1.26. $\alpha = -3$, $\beta = 5$, $\gamma = 1$, $\delta = 7$, $k = 4$, $l = 6$, $\varphi = 5\pi/3$, $\lambda = -2$, $\mu = 3$, $\nu = 3$, $\tau = -2$. (*Ответ*: а) -2532.)

1.27. $\alpha = -3$, $\beta = 4$, $\gamma = 5$, $\delta = -6$, $k = 4$, $l = 5$, $\varphi = \pi$, $\lambda = 2$, $\mu = 3$, $\nu = -3$, $\tau = -1$. (*Ответ*: а) 21 156.)

1.28. $\alpha = 6$, $\beta = -7$, $\gamma = -1$, $\delta = -3$, $k = 2$, $l = 6$, $\varphi = 4\pi/3$, $\lambda = 3$, $\mu = -2$, $\nu = 1$, $\tau = 4$. (*Ответ*: а) $-12\,200$.)

1.29. $\alpha = 5$, $\beta = 3$, $\gamma = -4$, $\delta = -2$, $k = 6$, $l = 3$, $\varphi = 5\pi/3$, $\lambda = -2$, $\mu = -1/2$, $\nu = 3$, $\tau = 2$. (*Ответ*: а) -2916.)

1.30. $\alpha = 4$, $\beta = -3$, $\gamma = -2$, $\delta = 6$, $k = 4$, $l = 7$, $\varphi = \pi/3$, $\lambda = 2$, $\mu = -1/2$, $\nu = 3$, $\tau = 2$. (*Ответ*: а) -801.)

2. По координатам точек A, B и C для указанных векторов найти: а) модуль вектора $\mathbf{a}$; б) скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; в) проекцию вектора $\mathbf{c}$ на вектор $\mathbf{d}$; г) координаты точки M, делящей отрезок l в отношении $\alpha : \beta$.

2.1. $A(4, 6, 3)$, $B(-5, 2, 6)$, $C(4, -4, -3)$, $\mathbf{a} = 4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{CB}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = AB$, $\alpha = 5$, $\beta = 4$. (*Ответ*: а) $\sqrt{4216}$; б) 314; г) $(-1, 34/9, 14/3)$.)

2.2. $A(4, 3, -2)$, $B(-3, -1, 4)$, $C(2, 2, 1)$, $\mathbf{a} = -5\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{CB}$, $l = BC$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$. (*Ответ*: а) $\sqrt{82}$; б) -50; г) $(-1, 1/5, 14/5)$.)

2.3. $A(-2, -2, 4)$, $B(1, 3, -2)$, $C(1, 4, 2)$, $\mathbf{a} = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$. (*Ответ*: а) $\sqrt{1750}$; б) -53; г) $(-1, -1/3, 2)$.)

2.4. $A(2, 4, 3)$, $B(3, 1, -4)$, $C(-1, 2, 2)$, $\mathbf{a} = 2\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BA}$, $\mathbf{c} = \mathbf{b}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 1$, $\beta = 4$. (*Ответ*: а) $\sqrt{300}$; б) 78; г) $(14/5, 8/5, -13/5)$.)

2.5. $A(2, 4, 5)$, $B(1, -2, 3)$, $C(-1, -2, 4)$, $\mathbf{a} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c} = \mathbf{b}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AB}$, $l = AB$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$. (*Ответ*: а) 11; б) -20; г) $(8/5, 8/5, 21/5)$.)

2.6. $A(-1, -2, 4)$, $B(-1, 3, 5)$, $C(1, 4, 2)$, $\mathbf{a} = 3\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c} = \mathbf{b}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = AC$, $\alpha = 1$, $\beta = 7$. (*Ответ*: а) $\sqrt{410}$; б) 70, г) $(-3/4, -5/4, 15/4)$.)

2.7. $A(1, 3, 2)$, $B(-2, 4, -1)$, $C(1, 3, -2)$, $\mathbf{a} = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{c} = \mathbf{b}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AB}$, $l = AB$, $\alpha = 2$, $\beta = 4$. (*Ответ*: а) $\sqrt{491}$, б) 4; г) $(0, 10/3, 1)$.)

2.8. $A(2, -4, 3)$, $B(-3, -2, 4)$, $C(0, 0, -2)$, $\mathbf{a} = 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{CB}$, $l = AC$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$. (*Ответ*: а) $\sqrt{1957}$; б) -29; г) $(2/3, -4/5, -1/3)$.)

2.9. $A(3, 4, -4)$, $B(-2, 1, 2)$, $C(2, -3, 1)$, $\mathbf{a} = 5\overrightarrow{CB} + 4\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{BA}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$. (*Ответ*: а) $\sqrt{1265}$; б) -294; г) $(-4/7, 13/7, 2{,}7)$.)

2.10. $A(0, 2, 5)$, $B(2, -3, 4)$, $C(3, 2, -5)$, $\mathbf{a} = -3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AB}$, $l = AC$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$. (*Ответ*: а) $\sqrt{1646}$; б) -420; г) $(9/5, 2, -1)$.)

2.11. $A(-2, -3, -4)$, $B(2, -4, 0)$, $C(1, 4, 5)$, $\mathbf{a} = 4\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{BC}$, $l = AB$, $\alpha = 4$, $\beta = 2$. (*Ответ*: а) $\sqrt{1777}$; б) 80; г) $(2/3, -11/3, -4/3)$.)

2.12. $A(-2, -3, -2)$, $B(1, 4, 2)$, $C(1, -3, 3)$, $\mathbf{a} = 2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BC$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$. (*Ответ*: а) $\sqrt{856}$; б) 238; г) $(1, -5/4, 11/4)$.)

2.13. $A(5, 6, 1)$, $B(-2, 4, -1)$, $C(3, -3, 3)$, $\mathbf{a} = 3\overrightarrow{AB} -$

$-4\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=BC$, $\alpha=3$, $\beta=2$. (*Ответ*: а) $\sqrt{2649}$; б) -160; г) $(1, -1/5, 7/5)$.)

2.14. $A(10, 6, 3)$, $B(-2, 4, 5)$, $C(3, -4, -6)$, $\mathbf{a}=5\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=CB$, $\alpha=1$, $\beta=5$. (*Ответ*: а) $\sqrt{9470}$; б) -298; г) $(13/6, -8/3, -25{,}6)$.)

2.15. $A(3, 2, 4)$, $B(-2, 1, 3)$, $C(2, -2, -1)$, $\mathbf{a}=4\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{BC}$, $l=AC$, $\alpha=2$, $\beta=4$. (*Ответ*: а) $\sqrt{362}$; б) 94; г) $(8/3, 2/3, 7/3)$.)

2.16. $A(-2, 3, -4)$, $B(3, -1, 2)$, $C(4, 2, 4)$, $\mathbf{a}=7\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{CB}$, $l=AB$, $\alpha=2$, $\beta=5$. (*Ответ*: а) $\sqrt{4109}$; б) 554; г) $(-4/7, 13/7, -16/7)$.)

2.17. $A(4, 5, 3)$, $B(-4, 2, 3)$, $C(5, -6, -2)$, $\mathbf{a}=9\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=BC$, $\alpha=5$, $\beta=1$. (*Ответ*: а) $\sqrt{12\,089}$; б) -263; г) $(7/2, -14/3, -7/6)$.)

2.18. $A(2, 4, 6)$, $B(-3, 5, 1)$, $C(4, -5, -4)$, $\mathbf{a}=-6\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{CA}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{BA}$, $l=BC$, $\alpha=1$, $\beta=3$. (*Ответ*: а) $\sqrt{5988}$; б) 986; г) $(-5/4, 5/2, -1/4)$.)

2.19. $A(-4, -2, -5)$, $B(3, 7, 2)$, $C(4, 6, -3)$, $\mathbf{a}=9\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{BC}$, $l=BA$, $\alpha=4$, $\beta=3$. (*Ответ*: а) $\sqrt{16\,740}$; б) -1308; г) $(-1, 13/7, -2)$.)

2.20. $A(5, 4, 4)$, $B(-5, 2, 3)$, $C(4, 2, -5)$, $\mathbf{a}=11\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BC$, $\alpha=3$, $\beta=1$. (*Ответ*: а) $\sqrt{11\,150}$; б) 1185; г) $(7/4, 2, -3)$.)

2.21. $A(3, 4, 6)$, $B(-4, 6, 4)$, $C(5, -2, -3)$, $\mathbf{a}=-7\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CA}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{CA}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{BC}$, $l=BA$, $\alpha=5$. $\beta=3$. (*Ответ*: а) $\sqrt{18\,666}$; б) -487; г) $(3/8, 19/4, 21/4)$.)

2.22. $A(-5, -2, -6)$, $B(3, 4, 5)$, $C(2, -5, 4)$, $\mathbf{a}=8\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{BC}$, $l=AC$, $\alpha=3$, $\beta=4$, (*Ответ*: а) $\sqrt{11\,387}$; б) 1549; г) $(-2, -23/7, -12/7)$.)

2.23. $A(3, 4, 1)$, $B(5, -2, 6)$, $C(4, 2, -7)$, $\mathbf{a}=-7\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=AB$, $\alpha=2$, $\beta=3$. (*Ответ*: а) $\sqrt{6826}$; б) -1120; г) $(19/5, 8/5, 3)$.)

2.24. $A(4, 3, 2)$, $B(-4, -3, 5)$, $C(6, 4, -3)$, $\mathbf{a}=8\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BC$, $\alpha=2$, $\beta=5$. (*Ответ*: а) $\sqrt{1885}$; б) -434; г) $(-8/7, -1, 19/7)$.)

2.25. $A(-5, 4, 3)$, $B(4, 5, 2)$, $C(2, 7, -4)$, $\mathbf{a}=3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{CA}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=BC$, $\alpha=3$, $\beta=4$. (*Ответ*: а) $\sqrt{608}$; б) -248; г) $(22/7, 41/7, -4/7)$.)

2.26. $A(6, 4, 5)$, $B(-7, 1, 8)$, $C(2, -2, -7)$, $\mathbf{a}=5\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=AB$, $\alpha=3$, $\beta=2$. (*Ответ*: а) $\sqrt{11\,899}$; б) 697; г) $(-9/5, 11/5, 34/5)$.)

2.27. $A(6, 5, -4)$, $B(-5, -2, 2)$, $C(3, 3, 2)$, $\mathbf{a}=6\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{CB}$, $l=BC$, $\alpha=1$, $\beta=5$. (*Ответ*: а) $\sqrt{3789}$; б) 396; г) $(-11/3, -7/6, 2)$.)

2.28. $A(-3, -5, 6)$, $B(3, 5, -4)$, $C(2, 6, 4)$, $\mathbf{a}=4\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BA$, $\alpha=4$, $\beta=2$. (*Ответ*: а) $\sqrt{14\,700}$; б) 470; г) $(-1, -5/3, 8/3)$.)

2.29. $A(3, 5, 4)$, $B(4, 2, -3)$, $C(-2, 4, 7)$, $\mathbf{a}=3\overrightarrow{BA}-4\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BA$, $\alpha=2$, $\beta=5$. (*Ответ*: а) $\sqrt{539}$; б) -85; г) $(26/7, 20/7, -1)$.)

2.30. $A(4, 6, 7)$, $B(2, -4, 1)$, $C(-3, -4, 2)$, $\mathbf{a}=5\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=AB$, $\alpha=3$, $\beta=4$. (*Ответ*: а) $\sqrt{1316}$; б) -40; г) $(22/7, 12/7, 31/7)$.)

3. Доказать, что векторы **a**, **b**, **c** образуют базис, и найти координаты вектора **d** в этом базисе.

3.1. $\mathbf{a}=(5, 4, 1)$, $\mathbf{b}=(-3, 5, 2)$, $\mathbf{c}=(2, -1, 3)$, $\mathbf{d}=(7, 23, 4)$. (*Ответ*: $(3, 2, -1)$.)

3.2. $\mathbf{a}=(2, -1, 4)$, $\mathbf{b}=(-3, 0, -2)$, $\mathbf{c}=(4, 5, -3)$, $\mathbf{d}=(0, 11, -14)$. (*Ответ*: $(-1, 2, 2)$.)

3.3. $\mathbf{a}=(-1, 1, 2)$, $\mathbf{b}=(2, -3, -5)$, $\mathbf{c}=(-6, 3, -1)$, $\mathbf{d}=(28, -19, -7)$. (*Ответ*: $(2, 3, -4)$.)

3.4. $\mathbf{a}=(1, 3, 4)$, $\mathbf{b}=(-2, 5, 0)$, $\mathbf{c}=(3, -2, -4)$, $\mathbf{d}=(13, -5, -4)$. (*Ответ*: $(2, -1, 3)$.)

3.5. $\mathbf{a}=(1, -1, 1)$, $\mathbf{b}=(-5, -3, 1)$, $\mathbf{c}=(2, -1, 0)$, $\mathbf{d}=(-15, -10, 5)$. (*Ответ*: $(2, 3, -1)$.)

3.6. $\mathbf{a}=(3, 1, 2)$, $\mathbf{b}=(-7, -2, -4)$, $\mathbf{c}=(-4, 0, 3)$, $\mathbf{d}=(16, 6, 15)$. (*Ответ*: $(2, -2, 1)$.)

3.7. $\mathbf{a}=(-3,\ 0,\ 1)$, $\mathbf{b}=(2,\ 7,\ -3)$, $\mathbf{c}=(-4,\ 3,\ 5)$, $\mathbf{d}=(-16,\ 33,\ 13)$. (*Ответ*: $(2,\ 3,\ 4)$.)

3.8. $\mathbf{a}=(5,\ 1,\ 2)$, $\mathbf{b}=(-2,\ 1,\ -3)$, $\mathbf{c}=(4,\ -3,\ 5)$, $\mathbf{d}=(15,\ -15,\ 24)$. (*Ответ*: $(-1,\ 28,\ 4)$.)

3.9. $\mathbf{a}=(0,\ 2,\ -3)$, $\mathbf{b}=(4,\ -3,\ -2)$, $\mathbf{c}=(-5,\ -4,\ 0)$, $\mathbf{d}=(-19,\ -5,\ -4)$. (*Ответ*: $(2,\ -1,\ 3)$.)

3.10. $\mathbf{a}=(3,\ -1,\ 2)$, $\mathbf{b}=(-2,\ 3,\ 1)$, $\mathbf{c}=(4,\ -5,\ -3)$, $\mathbf{d}=(-3,\ 2,\ -3)$. (*Ответ*: $(-1,\ 2,\ 1)$.)

3.11. $\mathbf{a}=(5,\ 3,\ 1)$, $\mathbf{b}=(-1,\ 2,\ -3)$, $\mathbf{c}=(3,\ -4,\ 2)$, $\mathbf{d}=(-9,\ 34,\ -20)$. (*Ответ*: $(2,\ 4,\ -5)$.)

3.12. $\mathbf{a}=(3,\ 1,\ -3)$, $\mathbf{b}=(-2,\ 4,\ 1)$, $\mathbf{c}=(1,\ -2,\ 5)$, $\mathbf{d}=(1,\ 12,\ -20)$. (*Ответ*: $(2,\ 1,\ -3)$.)

3.13. $\mathbf{a}=(6,\ 1,\ -3)$, $\mathbf{b}=(-3,\ 2,\ 1)$, $\mathbf{c}=(-1,\ -3,\ 4)$, $\mathbf{d}=(15,\ 6,\ -17)$. (*Ответ*: $(1,\ -2,\ -3)$.)

3.14. $\mathbf{a}=(4,\ 2,\ 3)$, $\mathbf{b}=(-3,\ 1,\ -8)$, $\mathbf{c}=(2,\ -4,\ 5)$, $\mathbf{d}=(-12,\ 14,\ -31)$. (*Ответ*: $(0,\ 2,\ -3)$.)

3.15. $\mathbf{a}=(-2,\ 1,\ 3)$, $\mathbf{b}=(3,\ -6,\ 2)$, $\mathbf{c}=(-5,\ -3,\ -1)$, $\mathbf{d}=(31,\ -6,\ 22)$. (*Ответ*: $(3,\ 4,\ -5)$.)

3.16. $\mathbf{a}=(1,\ 3,\ 6)$, $\mathbf{b}=(-3,\ 4,\ -5)$, $\mathbf{c}=(1,\ -7,\ 2)$, $\mathbf{d}=(-2,\ 17,\ 5)$. (*Ответ*: $(12,\ 1,\ -1)$.)

3.17. $\mathbf{a}=(7,\ 2,\ 1)$, $\mathbf{b}=(5,\ 1,\ -2)$, $\mathbf{c}=(-3,\ 4,\ 5)$, $\mathbf{d}=(26,\ 11,\ 1)$. (*Ответ*: $(2,\ 3,\ 1)$.)

3.18. $\mathbf{a}=(3,\ 5,\ 4)$, $\mathbf{b}=(-2,\ 7,\ -5)$, $\mathbf{c}=(6,\ -2,\ 1)$, $\mathbf{d}=(6,\ -9,\ 22)$. (*Ответ*: $(2,\ -3,\ -1)$.)

3.19. $\mathbf{a}=(5,\ 3,\ 2)$, $\mathbf{b}=(2,\ -5,\ 1)$, $\mathbf{c}=(-7,\ 4,\ -3)$, $\mathbf{d}=(36,\ 1,\ 15)$. (*Ответ*: $(5,\ 2,\ -1)$.)

3.20. $\mathbf{a}=(11,\ 1,\ 2)$, $\mathbf{b}=(-3,\ 3,\ 4)$, $\mathbf{c}=(-4,\ -2,\ 7)$, $\mathbf{d}=(-5,\ 11,\ -15)$. (*Ответ*: $(-1,\ 2,\ -3)$.)

3.21. $\mathbf{a}=(9,\ 5,\ 3)$, $\mathbf{b}=(-3,\ 2,\ 1)$, $\mathbf{c}=(4,\ -7,\ 4)$, $\mathbf{d}=(-10,\ -13,\ 8)$. (*Ответ*: $(-1,\ 3,\ 2)$.)

3.22. $\mathbf{a}=(7,\ 2,\ 1)$, $\mathbf{b}=(3,\ -5,\ 6)$, $\mathbf{c}=(-4,\ 3,\ -4)$, $\mathbf{d}=(-1,\ 18,\ -16)$. (*Ответ*: $2,\ -1,\ 3)$.)

3.23. $\mathbf{a}=(1,\ 2,\ 3)$, $\mathbf{b}=(-5,\ 3,\ -1)$, $\mathbf{c}=(-6,\ 4,\ 5)$, $\mathbf{d}=(-4,\ 11,\ 20)$. (*Ответ*: $(3,\ -1,\ 2)$.)

3.24. $\mathbf{a}=(-2,\ 5,\ 1)$, $\mathbf{b}=(3,\ 2,\ -7)$, $\mathbf{c}=(4,\ -3,\ 2)$, $\mathbf{d}=(-4,\ 22,\ -13)$. (*Ответ*: $(3,\ 2,\ -1)$.)

3.25. $\mathbf{a}=(3,\ 1,\ 2)$, $\mathbf{b}=(-4,\ 3,\ -1)$, $\mathbf{c}=(2,\ 3,\ 4)$, $\mathbf{d}=(14,\ 14,\ 20)$. (*Ответ*: $(2,\ 0,\ 4)$.)

3.26. $\mathbf{a}=(3,\ -1,\ 2)$, $\mathbf{b}=(-2,\ 4,\ 1)$, $\mathbf{c}=(4,\ -5,\ -1)$, $\mathbf{d}=(-5,\ 11,\ 1)$. (*Ответ*: $(-1,\ 5,\ 2)$.)

3.27. $\mathbf{a}=(4,\ 5,\ 1)$, $\mathbf{b}=(1,\ 3,\ 1)$, $\mathbf{c}=(-3,\ -6,\ 7)$, $\mathbf{d}=(19,\ 33,\ 0)$. (*Ответ*: $(3,\ 4,\ -1)$.)

3.28. $\mathbf{a}=(1,\ -3,\ 1)$, $\mathbf{b}=(-2,\ -4,\ 3)$, $\mathbf{c}=(0,\ -2,\ 3)$, $\mathbf{d}=(-8,\ -10,\ 13)$. (*Ответ*: $(-2,\ 3,\ 2)$.)

3.29. $\mathbf{a}=(5,\ 7,\ -2)$, $\mathbf{b}=(-3,\ 1,\ 3)$, $\mathbf{c}=(1,\ -4,\ 6)$, $\mathbf{d}=(14,\ 9,\ -1)$. (*Ответ*: $(2,\ -1,\ 1)$.)

3.30. $\mathbf{a}=(-1,\ 4,\ 3)$, $\mathbf{b}=(3,\ 2,\ -4)$, $\mathbf{c}=(-2,\ -7,\ 1)$, $\mathbf{d}=(6,\ 20,\ -3)$. (*Ответ*: $(1,\ 1,\ -2)$.)

Решение типового варианта

1. Даны векторы $\mathbf{a}=-\mathbf{m}+6\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}=3\mathbf{m}+4\mathbf{n}$, где $|\mathbf{m}|=2$; $|\mathbf{n}|=5$; $(\widehat{\mathbf{m},\ \mathbf{n}})=2\pi/3$. Найти: а) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$; б) $\text{пр}_{\mathbf{b}}(4\mathbf{a}-5\mathbf{b})$; в) $\cos(\widehat{2\mathbf{b}-\mathbf{a},\ 4\mathbf{b}})$.

▶ а) Вычисляем

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(-\mathbf{m}+6\mathbf{n})\cdot(3\mathbf{m}+4\mathbf{n})=$$
$$=-3\mathbf{m}^2+14|\mathbf{m}|\,|\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m},\ \mathbf{n}})+24\mathbf{n}^2=$$
$$=-3\cdot2^2+14\cdot2\cdot5(-1/2)+24\cdot5^2=518;$$

б) Пусть $\mathbf{c}=4\mathbf{a}-5\mathbf{b}=-19\mathbf{m}+4\mathbf{n}$. Тогда

$$\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{c}=\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},$$

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}=(-19\mathbf{m}+4\mathbf{n})\cdot(3\mathbf{m}+4\mathbf{n})=$$
$$=-57\mathbf{m}^2-64|\mathbf{m}|\,|\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m},\ \mathbf{n}})+16\mathbf{n}^2=-148,$$
$$|\mathbf{b}|=\sqrt{\mathbf{b}^2}=\sqrt{(3\mathbf{m}+4\mathbf{n})^2}=$$
$$=\sqrt{9\mathbf{m}^2+24|\mathbf{m}|\,|\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m},\ \mathbf{n}})+16\mathbf{n}^2}=\sqrt{316}.$$

Окончательно получаем

$$\text{пр}_{\mathbf{b}}(4\mathbf{a}-5\mathbf{b})=-148/\sqrt{316};$$

в) Пусть $\mathbf{d}=2\mathbf{b}-\mathbf{a}=7\mathbf{m}+2\mathbf{n}$, $\mathbf{e}=4\mathbf{b}=12\mathbf{m}+16\mathbf{n}$. Тогда

$$\cos(\widehat{\mathbf{d},\ \mathbf{e}})=\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}}{|\mathbf{d}|\,|\mathbf{e}|},$$
$$\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}=(7\mathbf{m}+2\mathbf{n})\cdot(12\mathbf{m}+16\mathbf{n})=$$
$$=84\mathbf{m}^2+136|\mathbf{m}|\,|\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m},\ \mathbf{n}})+32|\mathbf{n}|^2=456,$$
$$|\mathbf{d}|=\sqrt{(7\mathbf{m}+2\mathbf{n})^2}=$$
$$=\sqrt{49\mathbf{m}^2+28|\mathbf{m}|\,|\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m},\ \mathbf{n}})+4\mathbf{n}^2}=\sqrt{156},$$
$$|\mathbf{e}|=\sqrt{(12\mathbf{m}+16\mathbf{n})^2}=$$

$$=\sqrt{144\mathbf{m}^2+384\,|\mathbf{m}|\,|\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m},\mathbf{n}})+256\mathbf{n}^2}=\sqrt{5056}.$$

В результате имеем:

$$\cos(\widehat{2\mathbf{b}-\mathbf{a},\ 4\mathbf{b}})=456/\sqrt{788736}\approx 0{,}5. \blacktriangleleft$$

2. По координатам точек $A(-5,\ 1,\ 6)$, $B(1,\ 4,\ 3)$ и $C(6,\ 3,\ 9)$ найти: а) модуль вектора $\mathbf{a}=4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; б) скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{BC}$; в) проекцию вектора $\mathbf{c}=\mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{d}=\overrightarrow{AB}$; г) координаты точки M, делящей отрезок $l=AB$ в отношении $1:3$.

▶ а) Последовательно находим $\overrightarrow{AB}=(6,\ 3,\ -3)$, $\overrightarrow{BC}=(5,\ -1,\ 6)$, $4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(29,\ 11,\ -6)$,

$$|4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=\sqrt{29^2+11^2+(-6)^2}=\sqrt{998};$$

б) Имеем $\mathbf{a}=(29,\ 11,\ -6)$, $\mathbf{b}=(5,\ -1,\ 6)$. Тогда

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=29\cdot 5+11(-1)+(-6)6=98;$$

в) Так как

$$\text{пр}_{\mathbf{d}}\mathbf{c}=\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|},\quad \mathbf{d}=(6,\ 3,\ -3),$$

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=30-3-18=9,\quad |\mathbf{d}|=\sqrt{36+9+9}=\sqrt{54},$$

то

$$\text{пр}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{BC}=9/\sqrt{54};$$

г) Имеем: $\lambda=1/3$, $\mathbf{r}_M=\dfrac{\mathbf{r}_A+\lambda\mathbf{r}_B}{1+\lambda}$. Следовательно,

$$x_M=\frac{-5+1/3\cdot 1}{1+1/3}=-\frac{7}{2},\quad y_M=\frac{1+4\cdot 1/3}{1+1/3}=\frac{7}{4},$$

$$z_M=\frac{6+1/3\cdot 3}{1+1/3}=\frac{21}{4},\quad M(-7/2,\ 7/4,\ 21/4). \blacktriangleleft$$

3. Доказать, что векторы $\mathbf{a}=(3,\ -1,\ 0)$, $\mathbf{b}=(2,\ 3,\ 1)$, $\mathbf{c}=(-1,\ 4,\ 3)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\mathbf{d}=(2,\ 3,\ 7)$ в этом базисе.

▶ Вычисляем

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 4 & 3\end{vmatrix}=22\neq 0.$$

Следовательно, векторы **a**, **b**, **c** образуют базис, и вектор **d** линейно выражается через базисные векторы:

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$$

или в координатной форме

$$\left.\begin{aligned} 3\alpha + 2\beta - \gamma &= 2,\\ -\alpha + 3\beta + 4\gamma &= 3,\\ \beta + 3\gamma &= 7. \end{aligned}\right\}$$

Решаем полученную систему по формулам Крамера. Находим: $\Delta = 22$,

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 66, \quad \Delta(\beta) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -44,$$

$$\Delta(\gamma) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 66,$$

$$\alpha = \Delta(\alpha)/\Delta = 3, \quad \beta = \Delta(\beta)/\Delta = -2, \quad \gamma = \Delta(\gamma)/\Delta = 3,$$

поэтому $\mathbf{d} = (3, -2, 3) = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$. ◄

ИДЗ-2.2

1. Даны векторы **a**, **b** и **c**. Необходимо: а) вычислить смешанное произведение трех векторов; б) найти модуль векторного произведения; в) вычислить скалярное произведение двух векторов; г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора; д) проверить, будут ли компланарны три вектора.

1.1. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; а) $\mathbf{a}$, $3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; б) $3\mathbf{a}$, $2\mathbf{c}$; в) $\mathbf{b}$, $-4\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$; д) $\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) -261; б) $\sqrt{19116}$; в) 40.)

1.2. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$; а) $5\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; б) $4\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; в) $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$; г) $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; д) $2\mathbf{a}$, $-3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) 0; в) 6.)

1.3. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$; а) $\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; б) $3\mathbf{a}$, $-7\mathbf{b}$; в) $\mathbf{c}$, $-2\mathbf{a}$; г) $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$; д) $3\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) -1840; б) $\sqrt{612108}$; в) 0.)

1.4. $\mathbf{a} = -7\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; а) $\mathbf{a}$, $-2\mathbf{b}$, $-7\mathbf{c}$; б) $4\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; в) $2\mathbf{a}$, $-7\mathbf{c}$; г) $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; д) $2\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) 0; в) 42.)

1.5. $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$;

а) $\mathbf{a}$, $6\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; б) $2\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$; в) $\mathbf{a}$, $-4\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$; д) $\mathbf{a}$, $6\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) -2538; б) $\sqrt{3192}$; в) 12.)

1.6. $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=-3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$; а) $\mathbf{a}$, $-3\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; б) $5\mathbf{a}$, $3\mathbf{c}$; в) $-2\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$; г) $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$; д) $5\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) 0; в) 56.)

1.7. $\mathbf{a}=4\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-5\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=7\mathbf{i}+2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$; а) $7\mathbf{a}$, $-4\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; б) $3\mathbf{a}$, $5\mathbf{c}$; в) $2\mathbf{b}$, $4\mathbf{c}$; г) $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; д) $7\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, $5\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) -4480; б) $\sqrt{78750}$; в) 0.)

1.8. $\mathbf{a}=4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=-12\mathbf{i}-6\mathbf{j}+9\mathbf{k}$; а) $2\mathbf{a}$, $3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; б) $4\mathbf{a}$, $3\mathbf{b}$; в) $\mathbf{b}$, $-4\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$; д) $2\mathbf{a}$, $3\mathbf{b}$, $-4\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) $\sqrt{17\,280}$; в) 60.)

1.9. $\mathbf{a}=-\mathbf{i}+5\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=-3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=-2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+\mathbf{k}$; а) $3\mathbf{a}$, $-4\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; б) $7\mathbf{a}$, $-3\mathbf{c}$; в) $2\mathbf{b}$, $3\mathbf{a}$; г) $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; д) $7\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, $-3\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) -1680; б) $\sqrt{219177}$; в) 78.)

1.10. $\mathbf{a}=6\mathbf{i}-4\mathbf{j}+6\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=9\mathbf{i}-6\mathbf{j}+9\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}-8\mathbf{k}$; а) $2\mathbf{a}$, $-4\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; б) $3\mathbf{b}$, $-9\mathbf{c}$; в) $3\mathbf{a}$, $-5\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$; д) $3\mathbf{a}$, $-4\mathbf{b}$, $-9\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) $\sqrt{6488829}$; в) 630.)

1.11. $\mathbf{a}=5\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-7\mathbf{k}$; а) $\mathbf{a}$, $-4\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; б) $-2\mathbf{b}$, $4\mathbf{c}$; в) $-3\mathbf{a}$, $6\mathbf{c}$; г) $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; д) $\mathbf{a}$, $-2\mathbf{b}$, $6\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) -464; б) $\sqrt{127488}$; в) 504.)

1.12. $\mathbf{a}=-4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-7\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=4\mathbf{i}+6\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=6\mathbf{i}+9\mathbf{j}-3\mathbf{k}$; а) $-2\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $-2\mathbf{c}$; б) $4\mathbf{b}$, $7\mathbf{c}$; в) $5\mathbf{a}$, $-3\mathbf{b}$; г) $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; д) $-2\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$, $7\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) 0; в) -240.)

1.13. $\mathbf{a}=-5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=7\mathbf{i}-5\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$; а) $2\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$, $-5\mathbf{c}$; б) $-3\mathbf{b}$, $11\mathbf{c}$; в) $8\mathbf{a}$, $-6\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$; д) $8\mathbf{a}$, $-3\mathbf{b}$, $11\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 4360; б) $33\sqrt{682}$; в) 0.)

1.14. $\mathbf{a}=-4\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=-\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k}$; а) $5\mathbf{a}$, $7\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; б) $-4\mathbf{b}$, $11\mathbf{a}$; в) $3\mathbf{a}$, $-7\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$; д) $3\mathbf{a}$, $7\mathbf{b}$, $-2\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) 0; в) 672.)

1.15. $\mathbf{a}=-4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=-3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=6\mathbf{i}+6\mathbf{j}-4\mathbf{k}$; а) $5\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; б) $-7\mathbf{a}$, $4\mathbf{c}$; в) $3\mathbf{a}$, $9\mathbf{b}$; г) $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$; д) $3\mathbf{a}$, $-9\mathbf{b}$, $4\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) -1170; б) $56\sqrt{638}$; в) 567.)

1.16. $\mathbf{a}=-3\mathbf{i}+8\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=8\mathbf{i}+12\mathbf{j}-8\mathbf{k}$; а) $4\mathbf{a}$, $-6\mathbf{b}$, $5\mathbf{c}$; б) $-7\mathbf{a}$, $9\mathbf{c}$; в) $3\mathbf{b}$, $-8\mathbf{c}$; г) $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; д) $4\mathbf{a}$, $-6\mathbf{b}$, $9\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) $252\sqrt{917}$; в) -1632.)

1.17. $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=-9\mathbf{i}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-7\mathbf{k}$; а) $7\mathbf{a}$, $5\mathbf{b}$, $-\mathbf{c}$; б) $-5\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$; в) $3\mathbf{b}$, $-8\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$; д) $7\mathbf{a}$, $5\mathbf{b}$, $-\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) -10430; б) $\sqrt{40389}$; в) 984.)

1.18. $\mathbf{a}=9\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{i}-15\mathbf{j}+21\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}-5\mathbf{j}+$

$+7\mathbf{k}$; а) $2\mathbf{a}, -7\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$; б) $-6\mathbf{a}, 4\mathbf{c}$; в) $5\mathbf{b}, 7\mathbf{a}$; г) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; д) $2\mathbf{a}, -7\mathbf{b}, 4\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) $\sqrt{3365604}$; в) 3255.)

1.19. $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{b} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{c} = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$; а) $\mathbf{a}, -6\mathbf{b}, 2\mathbf{c}$; б) $-8\mathbf{b}, 5\mathbf{c}$; в) $-9\mathbf{a}, 7\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$; д) $\mathbf{a}, -6\mathbf{b}, 5\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 1068; б) $\sqrt{478400}$; в) -315.)

1.20. $\mathbf{a} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 20\mathbf{k}$; а) $-2\mathbf{a}, 7\mathbf{b}, 5\mathbf{c}$; б) $-6\mathbf{b}, 7\mathbf{c}$; в) $9\mathbf{a}, 4\mathbf{c}$; г) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; д) $-2\mathbf{a}, 7\mathbf{b}, 4\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) $\sqrt{52611300}$; в) 6660.)

1.21. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}, \mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$; а) $-3\mathbf{a}, 6\mathbf{b}, -\mathbf{c}$; б) $5\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$; в) $7\mathbf{a}, -4\mathbf{b}$; г) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; д) $7\mathbf{a}, -4\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 2196; б) $\sqrt{126900}$; в) 1288.)

1.22. $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; а) $3\mathbf{a}, -7\mathbf{b}, 2\mathbf{c}$; б) $2\mathbf{b}, 6\mathbf{c}$; в) $-4\mathbf{a}, -5\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; д) $-4\mathbf{a}, 2\mathbf{b}, 6\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 28728; б) $\sqrt{870912}$; в) 0.)

1.23. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$; а) $6\mathbf{a}, 3\mathbf{b}, 8\mathbf{c}$; б) $-7\mathbf{b}, 6\mathbf{a}$; в) $-5\mathbf{a}, 4\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$; д) $-5\mathbf{a}, 3\mathbf{b}, 4\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) 0; в) -560.)

1.24. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; а) $4\mathbf{a}, -7\mathbf{b}, -2\mathbf{c}$; б) $6\mathbf{a}, -4\mathbf{c}$; в) $-2\mathbf{a}, 5\mathbf{b}$; г) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; д) $6\mathbf{a}, -7\mathbf{b}, -2\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) 0; в) 160.)

1.25. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}, \mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$; а) $2\mathbf{a}, -\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$; б) $-9\mathbf{a}, 4\mathbf{c}$; в) $5\mathbf{b}, -6\mathbf{c}$; г) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; д) $2\mathbf{a}, 5\mathbf{b}, -6\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) $\sqrt{2519424}$; в) 900.)

1.26. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$; а) $-2\mathbf{a}, \mathbf{b}, 7\mathbf{c}$; б) $5\mathbf{a}, -2\mathbf{c}$; в) $3\mathbf{b}, \mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; д) $-2\mathbf{a}, 3\mathbf{b}, 7\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 1260; б) $10\sqrt{2997}$; в) 33.)

1.27. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{c} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; а) $-3\mathbf{a}, 4\mathbf{b}, -5\mathbf{c}$; б) $6\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$; в) $\mathbf{a}, 4\mathbf{c}$; г) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; д) $-3\mathbf{a}, 4\mathbf{b}, -5\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) 0; в) 80.)

1.28. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; а) $\mathbf{a}, 7\mathbf{b}, -2\mathbf{c}$; б) $-5\mathbf{a}, 4\mathbf{b}$; в) $8\mathbf{c}, -3\mathbf{a}$; г) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; д) $-3\mathbf{a}, 4\mathbf{b}, 8\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 2114; б) $20\sqrt{857}$; в) 0.)

1.29. $\mathbf{a} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{k}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$; а) $3\mathbf{a}, -5\mathbf{b}, -4\mathbf{c}$; б) $6\mathbf{b}, 2\mathbf{c}$; в) $-2\mathbf{a}, 8\mathbf{c}$; г) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; д) $3\mathbf{a}, 6\mathbf{b}, -4\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) 0; в) -144.)

1.30. $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$; а) $5\mathbf{a}, 3\mathbf{b}, -4\mathbf{c}$; б) $4\mathbf{b}, \mathbf{a}$; в) $7\mathbf{a}, -2\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$; д) $5\mathbf{a}, 4\mathbf{b}, -2\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 11 940; б) $4\sqrt{9933}$; в) 28.)

2. Вершины пирамиды находятся в точках A, B, C и D. Вычислить: а) площадь указанной грани; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра l и две вершины пирамиды; в) объем пирамиды $ABCD$.

2.1. $A(3, 4, 5)$, $B(1, 2, 1)$, $C(-2, -3, 6)$, $D(3, -6, -3)$; а) ACD; б) $l=AB$, C и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{2114}$; б) $\sqrt{4426}/2$; в) 42.)

2.2. $A(-7, -5, 6)$, $B(-2, 5, -3)$, $C(3, -2, 4)$, $D(1, 2, 2)$; а) BCD; б) $l=CD$, A и B. (*Ответ*: а) $\sqrt{1350}$; б) $\sqrt{8937}/2$; в) $77/3$.)

2.3. $A(1, 3, 1)$, $B(-1, 4, 6)$, $C(-2, -3, 4)$, $D(3, 4, -4)$; а) ACD; б) $l=BC$, A и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{891}/2$; б) $3\sqrt{2}/2$; в) 3.)

2.4. $A(2, 4, 1)$, $B(-3, -2, 4)$, $C(3, 5, -2)$, $D(4, 2, -3)$; а) ABD; б) $l=AC$, B и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{395}$; б) $\sqrt{205}/2$; в) $25/3$.)

2.5. $A(-5, -3, -4)$, $B(1, 4, 6)$, $C(3, 2, -2)$, $D(8, -2, 4)$; а) ACD; б) $l=BC$, A и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{6137}/2$; б) $\sqrt{7289}/2$; в) $304/3$.)

2.6. $A(3, 4, 2)$, $B(-2, 3, -5)$, $C(4, -3, 6)$, $D(6, -5, 3)$; а) ABD; б) $l=BD$, A и C. (*Ответ*: а) $8\sqrt{26}$; б) $\sqrt{1826}/2$; в) 40.)

2.7. $A(-4, 6, 3)$, $B(3, -5, 1)$, $C(2, 6, -4)$, $D(2, 4, -5)$; а) ACD; б) $l=AD$, B и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{94}$; б) $\sqrt{1554}/2$; в) $100/3$.)

2.8. $A(7, 5, 8)$, $B(-4, -5, 3)$, $C(2, -3, 5)$, $D(5, 1, -4)$; а) BCD; б) $l=BC$, A и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{1150}$; б) $\sqrt{4101}$; в) $202/3$.)

2.9. $A(3, -2, 6)$, $B(-6, -2, 3)$, $C(1, 1, -4)$, $D(4, 6, -7)$; а) ABD; б) $l=BD$, A и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{5040}$; б) $\sqrt{212}$; в) 52.)

2.10. $A(-5, -4, -3)$, $B(7, 3, -1)$, $C(6, -2, 0)$, $D(3, 2, -7)$; а) BCD; б) $l=AD$, B и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{1422}/2$; б) $\sqrt{504}$; в) 44.)

2.11. $A(3, -5, -2)$, $B(-4, 2, 3)$, $C(1, 5, 7)$, $D(-2,$

-4, 5); а) ACD; б) $l=BD$, A и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{6986}/2$; б) $\sqrt{1261}$; в) 202/3.)

2.12. $A(7, 4, 9)$, $B(1, -2, -3)$, $C(-5, -3, 0)$, $D(1, -3, 4)$; а) ABD; б) $l=AB$, C и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{1179}$; б) 17; в) 50.)

2.13. $A(-4, -7, -3)$, $B(-4, -5, 7)$, $C(2, -3, 3)$, $D(3, 2, 1)$; а) BCD; б) $l=BC$, A и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{276}$; б) $\sqrt{1393}$; в) 148/3.)

2.14. $A(-4, -5, -3)$, $B(3, 1, 2)$, $C(5, 7, -6)$, $D(6, -1, 5)$; а) ACD; б) $l=BC$, A и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{7281}$; б) $\sqrt{2726}$; в) 46.)

2.15. $A(5, 2, 4)$, $B(-3, 5, -7)$, $C(1, -5, 8)$, $D(9, -3, 5)$; а) ABD; б) $l=BD$, A и C. (*Ответ*: а) $2\sqrt{266}$; б) $\sqrt{1405}/2$; в) 286/3.)

2.16. $A(-6, 4, 5)$, $B(5, -7, 3)$, $C(4, 2, -8)$, $D(2, 8, -3)$; а) ACD; б) $l=AD$, B и C. (*Ответ*: а) $2\sqrt{251}$; б) $25\sqrt{38}/2$; в) 150.)

2.17. $A(5, 3, 6)$, $B(-3, -4, 4)$, $C(5, -6, 8)$, $D(4, 0, -3)$; а) BCD; б) $l=BC$, A и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{2294}$; б) $2\sqrt{406}$; в) 332/3.)

2.18. $A(5, -4, 4)$, $B(-4, -6, 5)$, $C(3, 2, -7)$, $D(6, 2, -9)$; а) ABD; б) $l=BD$, A и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{4140}$; б) $\sqrt{405}$; в) 82/3.)

2.19. $A(-7, -6, -5)$, $B(5, 1, -3)$, $C(8, -4, 0)$, $D(3, 4, -7)$; а) BCD; б) $l=AD$, B и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{158}/2$; б) $\sqrt{2266}/2$; в) 86/3.)

2.20. $A(7, -1, -2)$, $B(1, 7, 8)$, $C(3, 7, 9)$, $D(-3, -5, 2)$; а) ACD; б) $l=BD$, A и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{5957}$; б) $\sqrt{1361}$; в) 124/3.)

2.21. $A(5, 2, 7)$, $B(7, -6, -9)$, $C(-7, -6, 3)$, $D(1, -5, 2)$; а) ABD; б) $l=AB$, C и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{3194}$; б) $19\sqrt{2}/2$; в) 76.)

2.22. $A(-2, -5, -1)$, $B(-6, -7, 9)$, $C(4, -5, 1)$,

$D(2,\ 1,\ 4)$; а) BCD; б) $l=BC$, A и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{1802}$; б) $\sqrt{2142}/2$; в) $226/3$.)

2.23. $A(-6,\ -3,\ -5)$, $B(5,\ 1,\ 7)$, $C(3,\ 5,\ -1)$, $D(4,\ -2,\ 9)$; а) ACD; б) $l=BC$, A и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{24101}/2$; б) $\sqrt{2969}$; в) $4/3$.)

2.24. $A(7,\ 4,\ 2)$, $B(-5,\ 3,\ -9)$, $C(1,\ -5,\ 3)$, $D(7,\ -9,\ 1)$; а) ABD; б) $l=BD$, A и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{11161}$; б) $\sqrt{5629}/2$; в) 186.)

2.25. $A(-8,\ 2,\ 7)$, $B(3,\ -5,\ 9)$, $C(2,\ 4,\ -6)$, $D(4,\ 6,\ -5)$; а) ACD; б) $l=AD$, B и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{584}$; б) $\sqrt{9754}/2$; в) $296/3$.)

2.26. $A(4,\ 3,\ 1)$, $B(2,\ 7,\ 5)$, $C(-4,\ -2,\ 4)$, $D(2,\ -3,\ -5)$; а) ACD; б) $l=AB$, C и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{1666}$; б) $\sqrt{9746}/2$; в) $80/3$.)

2.27. $A(-9,\ -7,\ 4)$, $B(-4,\ 3,\ -1)$, $C(5,\ -4,\ 2)$, $D(3,\ 4,\ 4)$; а) BCD; б) $l=CD$, A и B. (*Ответ*: а) $\sqrt{1346}$; б) $\sqrt{13250}/2$; в) 120.)

2.28. $A(3,\ 5,\ 3)$, $B(-3,\ 2,\ 8)$, $C(-3,\ -2,\ 6)$, $D(7,\ 8,\ -2)$; а) ACD; б) $l=BD$, A и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{785}/2$; б) $\sqrt{58}/2$; в) $26/3$.)

2.29. $A(4,\ 2,\ 3)$, $B(-5,\ -4,\ 2)$, $C(5,\ 7,\ -4)$, $D(6,\ 4,\ -7)$; а) ABD; б) $l=AD$, B и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{3086}$; б) $\sqrt{501}$; в) $178/3$.)

2.30. $A(-4,\ -2,\ -3)$, $B(2,\ 5,\ 7)$, $C(6,\ 3,\ -1)$, $D(6,\ -4,\ 1)$; а) ACD; б) $l=BC$, A и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{1469}$; б) $\sqrt{1964}$; в) 116.)

3. Сила $\mathbf{F}$ приложена к точке A. Вычислить: а) работу силы $\mathbf{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B; б) модуль момента силы $\mathbf{F}$ относительно точки B.

3.1. $\mathbf{F}=(5,\ -3,\ 9)$, $A(3,\ 4,\ -6)$, $B(2,\ 6,\ 5)$. (*Ответ*: а) 88; б) $\sqrt{6746}$.)

3.2. $\mathbf{F}=(-3,\ 1,\ -9)$, $A(6,\ -3,\ 5)$, $B(9,\ 5,\ -7)$. (*Ответ*: а) 107; б) $\sqrt{8298}$.)

3.3. $\mathbf{F}=(2, 19, -4)$, $A(5, 3, 4)$, $B(6, -4, -1)$. (*Ответ*: а) 111; б) $\sqrt{16254}$.)

3.4. $\mathbf{F}=(-4, 5, -7)$, $A(4, -2, 3)$, $B(7, 0, -3)$. (*Ответ*: а) 40; б) $\sqrt{2810}$.)

3.5. $\mathbf{F}=(4, 11, -6)$, $A(3, 5, 1)$, $B(4, -2, -3)$. (*Ответ*: а) 49; б) $\sqrt{9017}$.)

3.6. $\mathbf{F}=(3, -5, 7)$, $A(2, 3, -5)$, $B(0, 4, 3)$. (*Ответ*: а) 45; б) $\sqrt{2819}$.)

3.7. $\mathbf{F}=(5, 4, 11)$, $A(6, 1, -5)$, $B(4, 2, -6)$. (*Ответ*: а) 17; б) $\sqrt{683}$.)

3.8. $\mathbf{F}=(-9, 5, 7)$, $A(1, 6, -3)$, $B(4, -3, 5)$. (*Ответ*: а) 16; б) $\sqrt{23614}$.)

3.9. $\mathbf{F}=(6, 5, -7)$, $A(7, -6, 4)$, $B(4, 9, -6)$. (*Ответ*: а) 127; б) $\sqrt{20611}$.)

3.10. $\mathbf{F}=(-5, 4, 4)$, $A(3, 7, -5)$, $B(2, -4, 1)$. (*Ответ*: а) 15; б) $\sqrt{8781}$.)

3.11. $\mathbf{F}=(4, 7, -3)$, $A(5, -4, 2)$, $B(8, 5, -4)$. (*Ответ*: а) 93; б) $15\sqrt{3}$.)

3.12. $\mathbf{F}=(2, 2, 9)$, $A(4, 2, -3)$, $B(2, 4, 0)$. (*Ответ*: а) 27; б) 28.)

Даны три силы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, приложенные к точке A. Вычислить: а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B; б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

3.13. $\mathbf{P}=(9, -3, 4)$, $\mathbf{Q}=(5, 6, -2)$, $\mathbf{R}=(-4, -2, 7)$, $A(-5, 4, -2)$, $B(4, 6, -5)$. (*Ответ*: а) 65; б) $\sqrt{12883}$.)

3.14. $\mathbf{P}=(5, -2, 3)$, $\mathbf{Q}=(4, 5, -3)$, $\mathbf{R}=(-1, -3, 6)$, $A(7, 1, -5)$, $B(2, -3, -6)$. (*Ответ*: а) 46; б) $2\sqrt{521}$.)

3.15. $\mathbf{P}=(3, -5, 4)$, $\mathbf{Q}=(5, 6, -3)$, $\mathbf{R}=(-7, -1, 8)$, $A(-3, 5, 9)$, $B(5, 6, -3)$. (*Ответ*: а) 100; б) $\sqrt{1306}$.)

3.16. $\mathbf{P}=(-10, 6, 5)$, $\mathbf{Q}=(4, -9, 7)$, $\mathbf{R}=(5, 3, -3)$, $A(4, -5, 9)$, $B(4, 7, -5)$. (*Ответ*: а) 126; б) $2\sqrt{3001}$.)

3.17. $\mathbf{P}=(5, -3, 1)$, $\mathbf{Q}=(4, 2, -6)$, $\mathbf{R}=(-5, -3, 7)$, $A(-5, 3, 7)$, $B(3, 8, -5)$. (*Ответ*: а) 4; б) $\sqrt{12389}$.)

3.18. $\mathbf{P}=(-5,\ 8,\ 4)$. $\mathbf{Q}=(6,\ -7,\ 3)$, $\mathbf{R}=(3,\ 1,\ -5)$, $A(2,\ -4,\ 7)$, $B(0,\ 7,\ 4)$. (*Ответ*: а) 8; б) $4\sqrt{197}$.)

3.19. $\mathbf{P}=(7,\ -5,\ 2)$, $\mathbf{Q}=(3,\ 4,\ -8)$, $\mathbf{R}=(-2,\ -4,\ 3)$, $A(-3,\ 2,\ 0)$, $B(6,\ 4,\ -3)$. (*Ответ*: а) 71; б) $\sqrt{4171}$.)

3.20. $\mathbf{P}=(3,\ -4,\ 2)$, $\mathbf{Q}=(2,\ 3,\ -5)$, $\mathbf{R}=(-3,\ -2,\ 4)$, $A(5,\ 3,\ -7)$, $B(4,\ -1,\ -4)$. (*Ответ*: а) 13; б) $\sqrt{195}$.)

3.21. $\mathbf{P}=(4,\ -2,\ -5)$, $\mathbf{Q}=(5,\ 1,\ -3)$, $\mathbf{R}=(-6,\ 2,\ 5)$, $A(-3,\ 2,\ -6)$, $B(4,\ 5,\ -3)$. (*Ответ*: а) 15; б) $2\sqrt{262}$.)

3.22. $\mathbf{P}=(7,\ 3,\ -4)$, $\mathbf{Q}=(9,\ -4,\ 2)$, $\mathbf{R}=(-6,\ 1,\ 4)$, $A(-7,\ 2,\ 5)$, $B(4,\ -2,\ 11)$. (*Ответ*: а) 122; б) $\sqrt{3108}$.)

3.23. $\mathbf{P}=(9,\ -4,\ 4)$, $\mathbf{Q}=(-4,\ 6,\ -3)$, $\mathbf{R}=(3,\ 4,\ 2)$, $A(5,\ -4,\ 3)$, $B(4,\ -5,\ 9)$. (*Ответ*: а) 4; б) $\sqrt{4126}$.)

3.24. $\mathbf{P}=(6,\ -4,\ 5)$, $\mathbf{Q}=(-4,\ 7,\ 8)$, $\mathbf{R}=(5,\ 1,\ -3)$, $A(-5,\ -4,\ 2)$, $B(7,\ -3,\ 6)$. (*Ответ*: а) 128; б) $\sqrt{10\,181}$.)

3.25. $\mathbf{P}=(5,\ 5,\ -6)$, $\mathbf{Q}=(7,\ -6,\ 6)$, $\mathbf{R}=(-4,\ 3,\ 4)$, $A(-9,\ 4,\ 7)$, $B(8,\ -1,\ 7)$. (*Ответ*: а) 126; б) $10\sqrt{105}$.)

3.26. $\mathbf{P}=(7,\ -6,\ 2)$, $\mathbf{Q}=(-6,\ 2,\ -1)$, $\mathbf{R}=(1,\ 6,\ 4)$, $A(3,\ -6,\ 1)$, $B(6,\ -2,\ 7)$. (*Ответ*: а) 44; б) $\sqrt{77}$.)

3.27. $\mathbf{P}=(4,\ -2,\ 3)$, $\mathbf{Q}=(-2,\ 5,\ 6)$, $\mathbf{R}=(7,\ 3,\ -1)$, $A(-3,\ -2,\ 5)$, $B(9,\ -5,\ 4)$. (*Ответ*: а) 82; б) $\sqrt{21\,150}$.)

3.28. $\mathbf{P}=(7,\ 3,\ -4)$, $\mathbf{Q}=(3,\ -2,\ 2)$, $\mathbf{R}=(-5,\ 4,\ 3)$, $A(-5,\ 0,\ 4)$, $B(4,\ -3,\ 5)$. (*Ответ*: а) 31; б) $4\sqrt{230}$.)

3.29. $\mathbf{P}=(3,\ -2,\ 4)$, $\mathbf{Q}=(-4,\ 4,\ -3)$, $\mathbf{R}=(3,\ 4,\ 2)$, $A(1,\ -4,\ 3)$, $B(4,\ 0,\ -2)$. (*Ответ*: а) 15; б) $5\sqrt{89}$.)

3.30. $\mathbf{P}=(2,\ -1,\ -3)$, $\mathbf{Q}=(3,\ 2,\ -1)$, $\mathbf{R}=(-4,\ 1,\ 3)$, $A(-1,\ 4,\ -2)$, $B(2,\ 3,\ -1)$. (*Ответ*: а) 0; б) $\sqrt{66}$.)

Решение типового варианта

1. Даны векторы $\mathbf{a}=4\mathbf{i}+4\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ и $\mathbf{c}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}$. Необходимо: а) вычислить произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $5\mathbf{c}$; б) найти модуль векторного произведения $3\mathbf{c}$ и $\mathbf{b}$; в) вычислить скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $3\mathbf{b}$; г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; д) проверить, будут ли компланарны векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

▶ а) Так как $5\mathbf{c} = 15\mathbf{i} + 25\mathbf{j}$, то

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot 5\mathbf{c} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 15 & 25 & 0 \end{vmatrix} = -100 - 180 - 200 = -480;$$

б) Поскольку $3\mathbf{c} = 9\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$, то

$$3\mathbf{c} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 9 & 15 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 30\mathbf{i} + 27\mathbf{k} + 15\mathbf{k} - 18\mathbf{j} =$$

$$= 30\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 42\mathbf{k},$$

$$|3\mathbf{c} \times \mathbf{b}| = \sqrt{30^2 + (-18)^2 + 42^2} = \sqrt{2988};$$

в) Находим: $3\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{a} \cdot 3\mathbf{b} = 4(-3) + 0 \cdot 9 + 4 \cdot 6 = 12$;

г) Так как $\mathbf{a} = (4, 0, 4)$, $\mathbf{b} = (-1, 3, 2)$ и $\frac{4}{-1} \neq \frac{0}{3} \neq \frac{4}{2}$, то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны. Поскольку

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4(-1) + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \neq 0,$$

то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не ортогональны;

д) векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны, если $\mathbf{abc} = 0$. Вычисляем

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 - 36 - 40 \neq 0,$$

т. е. векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не компланарны. ◀

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2, 3, 4)$, $B(4, 7, 3)$, $C(1, 2, 2)$ и $D(-2, 0, -1)$. Вычислить: а) площадь грани ABC; б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD; в) объем пирамиды $ABCD$.

▶ а) Известно, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Находим: $\overrightarrow{AB} = (2, 4, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, -1, -2)$,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Окончательно имеем:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{9^2 + 5^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{110};$$

б) Середины ребер AB, BC и AD находятся в точках $K(3;\ 5;\ 3{,}5)$, $M(1{,}5;\ 2{,}5;\ 3)$, $N(0;\ 1{,}5;\ 1{,}5)$. Далее имеем:

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{KM}\times\overrightarrow{KN}|,\quad \overrightarrow{KM}=(-1{,}5;\ -2{,}5;\ -0{,}5),$$

$$\overrightarrow{KN}=(-3;\ -3{,}5;\ -2),$$

$$\overrightarrow{KM}\times\overrightarrow{KN}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1{,}5 & -2{,}5 & -0{,}5 \\ -3 & -3{,}5 & -2 \end{vmatrix}=3{,}25\mathbf{i}-1{,}5\mathbf{j}-2{,}25\mathbf{k},$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2}\sqrt{3{,}25^2+1{,}5^2+2{,}25^2}=\frac{1}{2}\sqrt{17{,}875};$$

в) Поскольку $V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|$, $\overrightarrow{AD}=(-4,$ $-3,\ -5)$,

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix}=11,$$

то $V=11/6$. ◀

3. Сила $\mathbf{F}=(2,\ 3,\ -5)$ приложена к точке $A(1,\ -2,\ 2)$. Вычислить: а) работу силы $\mathbf{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(1,\ 4,\ 0)$; б) модуль момента силы $\mathbf{F}$ относительно точки B.

▶ а) Так как $A=\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$, $\mathbf{s}=\overrightarrow{AB}=(0,\ 6,\ -2)$, то

$$\mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}=2\cdot 0+3\cdot 6+(-5)(-2)=28,\quad A=28;$$

б) Момент силы $\mathbf{M}=\overrightarrow{BA}\times\mathbf{F}$, $\overrightarrow{BA}=(0,\ -6,\ 2)$,

$$\overrightarrow{BA}\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}=24\mathbf{i}+4\mathbf{j}+12\mathbf{k}.$$

Следовательно, $|\mathbf{M}|=\sqrt{24^2+4^2+12^2}=4\sqrt{46}$. ◀

2.5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 2

1. Даны три вектора: $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$. Найти вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий следующим условиям: $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}=-5$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}=-11$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c}=20$. (*Ответ*: $\mathbf{x}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$.)

2. Вектор $\mathbf{x}$, перпендикулярный к оси Oz и вектору $\mathbf{a} = (8, -15, 3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\mathbf{x}| = 51$, найти координаты $\mathbf{x}$. (*Ответ*: $\mathbf{x} = (45, 24, 0)$.)

3. Два трактора, идущие с постоянной скоростью по берегам прямого канала, тянут барку при помощи двух канатов. Силы натяжения канатов $|\mathbf{F}_1| = 800$ Н и $|\mathbf{F}_2| = 960$ Н, угол между канатами равен $60°$. Определить сопротивление воды, испытываемое баркой, если она движется параллельно берегам, и углы α, β между канатами и направлением движения. (*Ответ*: $|\mathbf{s}| \approx 1530$ Н, $\alpha \approx 33°$, $\beta \approx 27°$.)

4. Даны три силы $\mathbf{F} = (2, -1, -3)$, $\mathbf{Q} = (3, 2, -1)$ и $\mathbf{P} = (-4, 1, 3)$, приложенные к точке $C(-1, 4, -2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $A(2, 3, -1)$. (*Ответ*: $\sqrt{66}$; $\cos\alpha = 1/\sqrt{66}$, $\cos\beta = -4/\sqrt{66}$, $\cos\gamma = -7/\sqrt{66}$.)

5. Объем тетраэдра $V = 5$, три его вершины находятся в точках $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy. (*Ответ*: $D_1(0, 8, 0)$, $D_2(0, -7, 0)$.)

6. Стороны ромба лежат на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, выходящих из общей вершины. Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

7. Даны разложения векторов, служащих сторонами треугольника, по двум взаимно перпендикулярным ортам: $\overrightarrow{AB} = 5\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = 2\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ и $\overrightarrow{CA} = -7\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$. Вычислить длины медианы $\overrightarrow{AM}$ и высоты $\overrightarrow{AD}$ треугольника ABC. (*Ответ*: $|\overrightarrow{AM}| = 6$, $|\overrightarrow{AD}| = 12\sqrt{5}/5$.)

8. Доказать компланарность векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, зная, что $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

9. В трапеции $ABCD$ отношение основания $|\overrightarrow{AD}|$ к основанию $|\overrightarrow{BC}|$ равно λ. Полагая $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b}$, выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$. $\left(\textit{Ответ}: \overrightarrow{AB} = \dfrac{\lambda\mathbf{a} - \mathbf{b}}{1+\lambda},\ \overrightarrow{BC} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{1+\lambda},\ \overrightarrow{CD} = \dfrac{\lambda\mathbf{b} - \mathbf{a}}{1+\lambda},\ \overrightarrow{DA} = -\dfrac{\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b})}{1+\lambda}.\right)$

10. Дан тетраэдр $OABC$. Выразить через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ вектор $\overrightarrow{EF}$ с началом в середине E ребра $\overrightarrow{OA}$

и концом в точке F пересечения медиан треугольника ABC. (*Ответ*: $\overrightarrow{EF}=(2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})/6$.)

11. Даны четыре вектора $\mathbf{a}=(1, 2, 3)$, $\mathbf{b}=(2, -2, 1)$, $\mathbf{c}=(4, 0, 3)$, $\mathbf{d}=(16, 10, 18)$. Найти вектор $\mathbf{x}$, являющийся проекцией вектора $\mathbf{d}$ на плоскость, определяемую векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, при направлении проектирования, параллельном вектору $\mathbf{c}$. (*Ответ*: $\mathbf{x}=(-4, 10, 3)$.)

12. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу $\overrightarrow{AB}$ опущен перпендикуляр $\overrightarrow{CH}$. Выразить вектор $\overrightarrow{CH}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и длины катетов $|\overrightarrow{BC}|=a$, $|\overrightarrow{CA}|=$ $=b$. (*Ответ*: $\overrightarrow{CH}=(a^2\overrightarrow{CA}+b^2\overrightarrow{CB})/(a^2+b^2)$.)

13. Даны две точки $A(1, 2, 3)$ и $B(7, 2, 5)$. На прямой AB найти такую точку M, чтобы точки B и M были расположены по разные стороны от точки A и отрезок AM был в два раза длиннее отрезка AB. (*Ответ*: $M(-11, 2, -1)$.)

14. Векторы $\mathbf{a}=(-3, 0, 4)$ и $\mathbf{b}=(5, -2, -14)$ отложены из одной точки. Найти координаты единичного вектора $\mathbf{e}$, который, будучи отложен от той же точки, делит пополам угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. (*Ответ*: $\mathbf{e}=$ $=(-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$.)

15. Три последовательные вершины трапеции находятся в точках $A(-3, -2, -1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(9, 6, 4)$. Найти четвертую вершину D этой трапеции, точку M пересечения ее диагоналей и точку N пересечения боковых сторон, зная, что длина основания AD равна 15. (*Ответ*: $D(31/3, 14/3, 2/3)$, $M(9/2, 3, 17/8)$, $N(7, 8, 9)$.)

16. К вершине куба приложены три силы, равные по величине соответственно 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, выходящих из данной вершины. Найти величину равнодействующей этих трех сил и углы, образуемые ею с составляющими силами. $\left(\text{\textit{Ответ}: } 5;\ \arccos\frac{7}{10},\ \arccos\frac{8}{10},\ \arccos\frac{9}{10}.\right)$

17. Даны два вектора $\mathbf{a}=(8, 4, 1)$, $\mathbf{b}=(2, -2, 1)$. Найти вектор $\mathbf{c}$, компланарный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, перпендикулярный к вектору $\mathbf{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\mathbf{b}$ тупой угол. (*Ответ*: $\mathbf{c}=(-5/\sqrt{2}, 11/\sqrt{2}, -4/\sqrt{2})$.)

18. Убедившись, что векторы $\mathbf{a}=7\mathbf{i}+6\mathbf{j}-6\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=$

$= 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ можно рассматривать как ребра куба, найти его третье ребро. (*Ответ*: $\pm(6\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$.)

19. Даны три вектора $\mathbf{a} = (8, 4, 1)$, $\mathbf{b} = (2, -2, 1)$, $\mathbf{c} = (4, 0, 3)$. Найти единичный вектор $\mathbf{d}$, перпендикулярный к векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ имели одинаковую ориентацию. $\left(\textit{Ответ}\text{: } \mathbf{d} = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right).\right)$

20. Даны три некомпланарных вектора $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, отложенные от одной точки O. Найти вектор $\overrightarrow{OD} = \mathbf{d}$, отложенный от той же точки и образующий с векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ равные между собой острые углы. (*Ответ*: $\mathbf{d} = \pm(|\mathbf{a}|(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + |\mathbf{b}|(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + |\mathbf{c}|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}))$.)

3. ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ

3.1. ПЛОСКОСТЬ

Основная теорема. *В декартовых прямоугольных координатах уравнение любой плоскости приводится к виду*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.1}$$

где A, B, C, D — заданные числа, причем $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, и обратно, уравнение (3.1) всегда является уравнением некоторой плоскости.

Уравнение (3.1) называется *общим уравнением плоскости.* Коэффициенты A, B, C являются координатами вектора $\mathbf{n}$, перпендикулярного к плоскости, заданной уравнением (3.1). Он называется *нормальным вектором* этой плоскости и определяет ориентацию плоскости в пространстве относнтельно системы координат.

Существуют различные способы задания плоскости и соответствующие им виды ее уравнения.

1. *Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору.* Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярна к вектору $\mathbf{n} = (A, B, C)$, то ее уравнение записывается в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{3.2}$$

2. *Уравнение плоскости в «отрезках».* Если плоскость пересекает оси координат Ox, Oy, Oz в точках $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$, $M_3(0, 0, c)$ соответственно, то ее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{3.3}$$

где $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$.

3. *Уравнение плоскости по трем точкам.* Если плоскость проходит через точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = \overline{1, 3})$, не лежащие на одной прямой, то ее уравнение можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.4}$$

Раскрыв данный определитель по элементам первой строки, придем к уравнению вида (3.2).

Уравнения (3.2) — (3.4) всегда можно привести к виду (3.1). Рассмотрим простейшие задачи.

1°. Величина угла φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ вычисляется на основании формулы

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2}) = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ — нормальные векторы данных плоскостей. С помощью формулы (3.5) можно получить *условие перпендикулярности* данных *плоскостей:*

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \text{ или } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Условие параллельности рассматриваемых *плоскостей* имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

2°. Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной уравнением (3.1), вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

АЗ-3.1

1. Записать уравнение и построить плоскость:

а) параллельную плоскости Oxz и проходящую через точку $M_0(7, -3, 5)$;

б) проходящую через ось Oz и точку $A(-3, 1, -2)$;

в) параллельную оси Ox и проходящую через две точки $M_1(4, 0, -2)$ и $M_2(5, 1, 7)$;

г) проходящую через точку $B(2, 1, -1)$ и имеющую нормальный вектор $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$;

д) проходящую через точку $C(3, 4, -5)$ параллельно двум векторам $\mathbf{a} = (3, 1, -1)$ и $\mathbf{b} = (1, -2, 1)$.
(*Ответ:* а) $y + 3 = 0$; б) $x + 3y = 0$; в) $9y - z - 2 = 0$; г) $x - 2y + 3z + 3 = 0$; д) $x + 4y + 7z + 16 = 0$.)

2. Составить уравнение одной из граней тетраэдра, заданного вершинами $A(5, 4, 3)$, $B(2, 3, -2)$, $C(3, 4, 2)$, $D(-1, 2, 1)$. Проверить правильность полученного уравнения.

3. Составить уравнение плоскости:

а) проходящей через точки $M_1(1, 1, 1)$ и $M_2(2, 3, 4)$ перпендикулярно к плоскости $2x - 7y + 5z + 9 = 0$;

б) проходящей через точку $M_0(7, -5, 1)$ и отсекающей на осях координат равные положительные отрезки.
(*Ответ:* а) $31x + y - 11z - 21 = 0$; б) $x + y + z - 3 = 0$.)

4. Вычислить угол между плоскостями $x - 2y + 2z - 3 = 0$ и $3x - 4y + 5 = 0$. (*Ответ:* $\cos\varphi = 11/15$, $\varphi \approx 42°51'$.)

5. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями $3x + 6y + 2z - 15 = 0$ и $3x + 6y + 2z + 13 = 0$. (*Ответ:* 4.)

6. Записать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $3x - y + 7z - 4 = 0$ и $5x + 3y - 5z + 2 = 0$. (*Ответ:* $x + 2y - 6z + 3 = 0$, $4x + y + z - 1 = 0$.)

Самостоятельиая работа

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(1, 0, 2)$ перпендикулярно к двум плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $3x + 6y + 3z - 5 = 0$. (*Ответ:* $7x - y - 5z + 3 = 0$.)

2. Составить уравнение плоскости, параллельной вектору $\mathbf{s} = (2, 1, -1)$ и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки $a = 3$, $b = -2$. (*Ответ:* $2x - 3y + z - 6 = 0$.)

3. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $2x - 2y + 4z - 5 = 0$ и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки $a = -2$, $b = 2/3$ соответственно. (*Ответ*: $x - 3y - 2z + 2 = 0$.)

4. Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(-3, 1, -9)$ относительно плоскости $4x - 3y - z - 7 = 0$. (*Ответ:* $Q(1, -2, -10)$.)

3.2. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

В зависимости от способа задания прямой в пространстве можно рассматривать различные ее уравнения.

1. *Векторно-параметрическое уравнение прямой.* Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\mathbf{s} = (m, n, p)$,

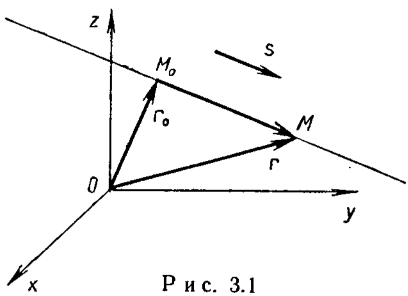


Рис. 3.1

а $M(x, y, z)$ — любая точка этой прямой. Если $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$ — радиусы-векторы точек M_0 и M (рис. 3.1), то справедливо векторное равенство

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{s} \quad (-\infty < t < +\infty), \tag{3.6}$$

которое получается по правилу сложения векторов. Уравнение (3.6) называется ***векторно-параметрическим уравнением прямой***, $\mathbf{s}$ — ***направляющим вектором прямой (3.6)***, t — ***параметром.***

2. *Параметрические уравнения прямой.* Из уравнения (3.6) получаем три скалярных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + mt, \\ y &= y_0 + nt, \\ z &= z_0 + pt, \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

которые называются *параметрическими уравнениями прямой.*

3. *Канонические уравнения прямой.* Разрешая уравнения в системе (3.7) относительно t и приравнивая полученные отношения, приходим к *каноническим уравнениям прямой:*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{3.8}$$

Отметим, что, зная одио из уравнений (3.6) — (3.8), легко получить другие уравиеиия.

4. *Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две точки.* Если прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то ее уравнения можно записать в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{3.9}$$

5. *Общие уравнения прямой в пространстве.* Две пересекающиеся плоскости

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \\ \mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2), \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $\mathbf{n}_1 \nparallel \mathbf{n}_2$, определяют прямую. Уравнения (3.10) называются *общими уравнениями прямой в пространстве.*

Направляющий вектор $\mathbf{s}$ прямой, заданной уравнениями (3.10), определяется по формуле

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

а координаты какой-либо точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на этой прямой, можио найти как решение системы (3.10). Тогда уравнения данной прямой можно записать в канонической форме (3.8).

Пример 1. Прямая задана общимн уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z + 4 = 0, \\ 3x + y - 5z - 8 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Записать ее канонические уравнения.

▶ Находим

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (3,\ 11,\ 4).$$

Полагая в нсходной системе $z = 0$ н складывая данные уравнения, получаем $x = 1$, $y = 5$. Точка $M_0(1, 5, 0)$ лежит на данной прямой. Ее канонические уравнения имеют вид

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 5}{11} = \frac{z}{4}. \blacktriangleleft$$

Рассмотрим случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве. Две прямые в пространстве или скрещиваются, или пересекаются, или параллельны, или совпадают. В любом случае они образуют некоторый угол (между их направляющими векторами $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$). Если прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}, \quad (3.11)$$

то величина угла φ между ними определяется из формулы

$$\cos\varphi=\cos(\widehat{\mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_2})=\frac{\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1|\ |\mathbf{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\ \sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \quad (3.12)$$

Теперь можно записать *условие перпендикулярности прямых:*

$$\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_2=0 \text{ или } m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

Условие параллельности прямых (3.11) имеет вид $\mathbf{s}_1\parallel\mathbf{s}_2\nparallel\overrightarrow{M_1M_2}$, а *условие* их *совпадения* — $\mathbf{s}_1\parallel\mathbf{s}_2\parallel\overrightarrow{M_1M_2}$, где точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ принадлежат прямым (3.11).

Запишем *необходимое и достаточное условие пересечения непараллельных прямых* ($\mathbf{s}_1\nparallel\mathbf{s}_2$), заданных уравнениями (3.11):

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_2=0 \text{ или } \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0. \quad (3.13)$$

Если условие (3.13) не выполняется, то прямые (3.11) — скрещивающиеся.

Расстояние h от точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ до прямой (3.8), проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ в направлении вектора $\mathbf{s}=(m,\ n,\ p)$, вычисляется по формуле

$$h=\frac{|\mathbf{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|}{|\mathbf{s}|}. \quad (3.14)$$

Рассмотрим случаи взаимного расположения прямой и плоскости. Прямая (3.8) и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ могут пересекаться, быть параллельными либо прямая может лежать в плоскости.

Перейдем от канонических уравнений (3.8) к параметрическим (3.7) и подставим значения $x,\ y,\ z$ из уравнений (3.7) в уравнение плоскости. Получим уравнение относительно неизвестного параметра t:

$$(Am+Bn+Cp)t+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0. \quad (3.15)$$

Возможны три случая.

1. При $Am+Bn+Cp\neq 0$ уравнение (3.15) имеет единственное решение: $t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D)/(Am+Bn+Cp)$. Подставив это значение t в параметрические уравнения прямой (3.7), найдем координаты точки пересечения M (рис. 3.2).

2. При

$$Am+Bn+Cp=0,\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0 \quad (3.16)$$

уравнение (3.15) не имеет решения, и прямая не имеет общих точек с плоскостью. Формулы (3.16) являются *условиями параллельности прямой и плоскости.*

3. При

$$Am+Bn+Cp=0,\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \quad (3.17)$$

любое значение t является решением уравнения (3.15), т. е. любая точка прямой принадлежит плоскости. Равенства (3.17) называются *условиями принадлежности прямой плоскости.*

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость.

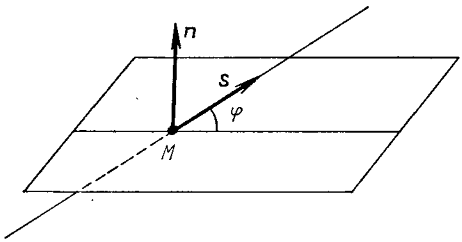


Рис. 3.2

Величина угла φ между прямой и плоскостью вычисляется по формуле

$$|\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{s}})| = \sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (3.18)$$

АЗ-3.2

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2, 0, -3)$:

а) параллельно вектору $\mathbf{s} = (2, -3, 5)$;

б) параллельно прямой $\left.\begin{matrix} 2x - \ \ y + 3z - 11 = 0, \\ 5x + 4y - \ \ z + \ \ 8 = 0. \end{matrix}\right\}$

$\left(\textit{Ответ:}\right.$ а) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+3}{5}$; б) $\dfrac{x-2}{11} = \dfrac{y}{-17} = \left.\dfrac{z+3}{-13}.\right)$

2. Установить взаимное расположение прямой и плоскости и в случае их пересечения найти координаты точки пересечения:

а) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}$ и $3x - 3y + 2z - 5 = 0$;

б) $\dfrac{x-13}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ и $x + 2y - 4z + 1 = 0$;

в) $\dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{4}$ и $3x - y + 2z - 5 = 0$.

(*Ответ:* а) параллельны; б) прямая лежит в плоскости; в) пересекается в точке $M(2, 3, 1)$.)

3. Найти координаты точки Q, симметричной точке

$P(2, -5, 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5, 4, 6)$ и $M_2(-2, -17, -8)$. (*Ответ:* $Q(4, -1, -3)$.)

4. Вычислить угол между прямой

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3=0,\\ 3y+z-1=0 \end{aligned}\right\}$$

и плоскостью $2x+3y-z+1=0$. (*Ответ:* $\sin\varphi=5/7$, $\varphi\approx 45°36'$.)

Самостоятельная работа

1. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ перпендикулярно к плоскости $x+4y-3z+7=0$. (*Ответ:* $11x-17y-19z+10=0$.)

2. Вычислить расстояние между прямыми $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$. (*Ответ:* $d=3$.)

3. Пересекаются ли прямые $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{3}$ и $\frac{x}{3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-3}{5}$? (*Ответ:* нет.)

3.3. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Основная теорема. *В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на плоскости любая прямая может быть задана уравнением первой степени относительно x и y:*

$$Ax+By+C=0, \tag{3.19}$$

где A, B, C — некоторые действительные числа, причем $A^2+B^2>0$, и обратно, всякое уравнение вида (3.19) определяет прямую.

Вектор $\mathbf{n}=(A, B)$ перпендикулярен к прямой (3.19) и называется *нормальным вектором прямой*. Уравнение (3.19) называется *общим уравнением прямой*.

Если $B\neq 0$, то уравнение (3.19) можно разрешить относительно y и представить в виде

$$y=kx+b \quad (k=\operatorname{tg}\alpha). \tag{3.20}$$

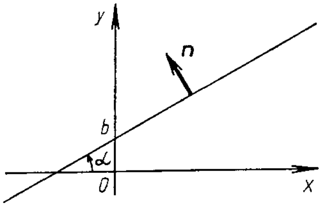


Рис. 3.3

Последнее уравнение называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом* k. Угол α, отсчитываемый от положительного направления оси Ox до прямой против хода часовой стрелки, называется *углом наклона прямой*, число b определяет величину отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy (рис. 3.3).

Существуют и другие виды уравнений прямой на плоскости:

1) *уравнение по точке* $M_0(x_0, y_0)$ *и угловому коэффициенту* k

$$y - y_0 = k(x - x_0); \tag{3.21}$$

2) *параметрические уравнения*

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + mt, \\ y &= y_0 + nt, \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

где $\mathbf{s} = (m, n)$ — направляющий вектор прямой, а точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на прямой;

3) *каноническое уравнение прямой* (получаем его из уравнений (3.22))

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}; \tag{3.23}$$

4) *уравнение прямой в «отрезках»*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{3.24}$$

Рассмотрим случаи взаимного расположения двух прямых на плоскости.

1. Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z = 0$, то угол φ между ними находится из формулы

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{3.25}$$

Условие перпендикулярности этих *прямых* имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0, \tag{3.26}$$

а *условие* их *параллельности*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \tag{3.27}$$

2. Если прямые заданы уравнениями вида (3.20) $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$, то угол φ между ними находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{3.28}$$

Для того чтобы прямые были параллельны, необходимо, чтобы выполнялось равенство $k_1 = k_2$, а для их перпендикулярности необходимо и достаточно, чтобы $k_1k_2 = -1$.

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой (3.19) вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.29}$$

АЗ-3.3

1. По данным уравнениям построить прямые, найти их угловые коэффициенты и отрезки, отсекаемые ими на осях координат: а) $2x - y + 3 = 0$; б) $5x + 2y - 8 = 0$; в) $3x + 8y + 16 = 0$; г) $3x - y = 0$.

2. Записать уравнения прямых, на которых лежат стороны равнобедренной трапеции, зная, что основания ее равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с бо́льшим основанием угол 60°. Большее основание лежит на оси абсцисс, а ось симметрии трапеции — на оси ординат. (*Ответ:* $y = 0$, $y = 2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$.)

3. Сила $\mathbf{F} = (m, n)$ приложена к точке $M_0(x_0, y_0)$. Записать уравнение прямой, вдоль которой направлена эта сила. (*Ответ:* $nx - my + my_0 - nx_0 = 0$.)

4. Записать уравнения прямых, которые проходят через точку $A(3, -1)$ и параллельны: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) биссектрисе первого координатного угла; г) прямой $y = 3x + 9$. (*Ответ:* а) $y = -1$; б) $x = 3$; в) $y = x - 4$; г) $y = 3x - 10$.)

5. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1, 3)$ и $B(4, 5)$. (*Ответ:* $2x - 5y + 17 = 0$.)

6. Луч света направлен по прямой $y = \frac{2}{3}x - 4$. Найти координаты точки M встречи луча с осью Ox и уравнение отраженного луча. (*Ответ:* $M(6, 0)$, $y = -\frac{2}{3}x + 4$.)

7. Точка $A(-2, 3)$ лежит на прямой, перпендикулярной к прямой $2x - 3y + 8 = 0$. Записать уравнение этой прямой. (*Ответ:* $3x + 2y = 0$.)

8. Точка $A(2, -5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Вычислить площадь квадрата. (*Ответ:* 5.)

Самостоятельная работа

1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $P(5, 2)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат. (*Ответ:* $x + y - 7 = 0$.)

2. Найти уравнение прямой, параллельной прямой $12x + 5y - 52 = 0$ и отстоящей от нее на расстоянии 2. (*Ответ:* $12x + 5y - 26 = 0$ или $12x + 5y - 78 = 0$.)

3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку

$M_0(4;\ -3)$ и образующей с осями координат треугольник площадью 3. $\left(Ответ:\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \text{ или } \frac{x}{4}+\frac{y}{3/2}=-1.\right)$

4. Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей угол 45° с прямой $y = 2x+5$. (*Ответ*: $3x+y=0$.)

5. Вычислить величину меньшего угла φ между прямыми $3x+4y-2=0$ и $8x+6y+5=0$. Доказать, что точка $A(13/14,\ -1)$ лежит на биссектрисе этого угла, и сделать рисунок. (*Ответ*: $\cos\varphi = 24/25 = 0{,}96$, $\varphi \approx 16°15'$.)

3.4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 3

ИДЗ-3.1

1. Даны четыре точки $A_1(x_1,\ y_1)$, $A_2(x_2,\ y_2)$, $A_3(x_3,\ y_3)$ и $A_4(x_4,\ y_4)$. Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$; б) прямой A_1A_2;

в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2;

д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.

Вычислить:

е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

ж) косинус угла между координатной поскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

1.1. $A_1(3,\ 1,\ 4)$, $A_2(-1,\ 6,\ 1)$, $A_3(-1,\ 1,\ 6)$, $A_4(0,\ 4,\ -1)$.

1.2. $A_1(3,\ -1,\ 2)$, $A_2(-1,\ 0,\ 1)$, $A_3(1,\ 7,\ 3)$, $A_4(8,\ 5,\ 8)$.

1.3. $A_1(3,\ 5,\ 4)$, $A_2(5,\ 8,\ 3)$, $A_3(1,\ 2,\ -2)$, $A_4(-1,\ 0,\ 2)$.

1.4. $A_1(2,\ 4,\ 3)$, $A_2(1,\ 1,\ 5)$, $A_3(4,\ 9,\ 3)$, $A_4(3,\ 6,\ 7)$.

1.5. $A_1(9,\ 5,\ 5)$, $A_2(-3,\ 7,\ 1)$, $A_3(5,\ 7,\ 8)$, $A_4(6,\ 9,\ 2)$.

1.6. $A_1(0,\ 7,\ 1)$, $A_2(2,\ -1,\ 5)$, $A_3(1,\ 6,\ 3)$, $A_4(3,\ -9,\ 8)$.

1.7. $A_1(5,\ 5,\ 4)$, $A_2(1,\ -1,\ 4)$, $A_3(3,\ 5,\ 1)$, $A_4(5,\ 8,\ -1)$.

1.8. $A_1(6,\ 1,\ 1)$, $A_2(4,\ 6,\ 6)$, $A_3(4,\ 2,\ 0)$, $A_4(1,\ 2,\ 6)$.

1.9. $A_1(7,\ 5,\ 3)$, $A_2(9,\ 4,\ 4)$, $A_3(4,\ 5,\ 7)$, $A_4(7,\ 9,\ 6)$.

1.10. $A_1(6,\ 8,\ 2)$, $A_2(5,\ 4,\ 7)$, $A_3(2,\ 4,\ 7)$, $A_4(7,\ 3,\ 7)$.

1.11. $A_1(4,\ 2,\ 5)$, $A_2(0,\ 7,\ 1)$, $A_3(0,\ 2,\ 7)$, $A_4(1,\ 5,\ 0)$.

1.12. $A_1(4,\ 4,\ 10)$, $A_2(7,10,\ 2)$, $A_3(2,\ 8,\ 4)$, $A_4(9,\ 6,\ 9)$.

1.13. $A_1(4,\ 6,\ 5)$, $A_2(6,\ 9,\ 4)$, $A_3(2,\ 10,\ 10)$, $A_4(7,\ 5,\ 9)$.

1.14. $A_1(3,\ 5,\ 4)$, $A_2(8,\ 7,\ 4)$, $A_3(5,\ 10,\ 4)$, $A_4(4,\ 7,\ 8)$.

1.15. $A_1(10,\ 9,\ 6)$, $A_2(2,\ 8,\ 2)$, $A_3(9,\ 8,\ 9)$, $A_4(7,\ 10,\ 3)$.

1.16. $A_1(1,\ 8,\ 2)$, $A_2(5,\ 2,\ 6)$, $A_3(5,\ 7,\ 4)$, $A_4(4,\ 10,\ 9)$.

1.17. $A_1(6, 6, 5)$, $A_2(4, 9, 5)$, $A_3(4, 6, 11)$, $A_4(6, 9, 3)$.

1.18. $A_1(7, 2, 2)$, $A_2(-5, 7, -7)$, $A_3(5, -3, 1)$, $A_4(2, 3, 7)$.

1.19. $A_1(8, -6, 4)$, $A_2(10, 5, -5)$, $A_3(5, 6, -8)$, $A_4(8, 10, 7)$.

1.20. $A_1(1, -1, 3)$, $A_2(6, 5, 8)$, $A_3(3, 5, 8)$, $A_4(8, 4, 1)$.

1.21. $A_1(1, -2, 7)$, $A_2(4, 2, 10)$, $A_3(2, 3, 5)$, $A_4(5, 3, 7)$.

1.22. $A_1(4, 2, 10)$, $A_2(1, 2, 0)$, $A_3(3, 5, 7)$, $A_4(2, -3, 5)$.

1.23. $A_1(2, 3, 5)$, $A_2(5, 3, -7)$, $A_3(1, 2, 7)$, $A_4(4, 2, 0)$.

1.24. $A_1(5, 3, 7)$, $A_2(-2, 3, 5)$, $A_3(4, 2, 10)$, $A_4(1, 2, 7)$.

1.25. $A_1(4, 3, 5)$, $A_2(1, 9, 7)$, $A_3(0, 2, 0)$, $A_4(5, 3, 10)$.

1.26. $A_1(3, 2, 5)$, $A_2(4, 0, 6)$, $A_3(2, 6, 5)$, $A_4(6, 4, -1)$.

1.27. $A_1(2, 1, 6)$, $A_2(1, 4, 9)$, $A_3(2, -5, 8)$, $A_4(5, 4, 2)$.

1.28. $A_1(2, 1, 7)$, $A_2(3, 3, 6)$, $A_3(2, -3, 9)$, $A_4(1, 2, 5)$.

1.29. $A_1(2, -1, 7)$, $A_2(6, 3, 1)$, $A_3(3, 2, 8)$, $A_4(2, -3, 7)$.

1.30. $A_1(0, 4, 5)$, $A_2(3, -2, 1)$, $A_3(4, 5, 6)$, $A_4(3, 3, 2)$.

2. Решить следующие задачи.

2.1. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(-2, 7, 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$. (*Ответ*: $-1/15$, $4/15$, $-1/3$.)

2.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(1, 5, 6)$, $M_2(-1, 7, 10)$. (*Ответ*: $x - y - 2z + 22 = 0$.)

2.3. Найти расстояние от точки $M(2; 0; -0{,}5)$ до плоскости $4x - 4y + 2z + 17 = 0$. (*Ответ*: $d = 4$.)

2.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2, -3, 5)$ параллельно плоскости Oxy. (*Ответ*: $z - 5 = 0$.)

2.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(2, 5, -1)$. (*Ответ*: $y + 5z = 0$.)

2.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 5, -1)$, $B(-3, 1, 3)$ параллельно оси Oy. (*Ответ*: $4x + 5z - 3 = 0$.)

2.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, 4, 0)$ и прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$. (*Ответ*: $y - z - 4 = 0$.)

2.8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. (*Ответ*: $x + 2y - 2z - 1 = 0$.)

2.9. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x - y - 7z + 9 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $A(3,\ 2,\ -5)$. (*Ответ:* $3x - y - 7z + 9 = 0,\ 5y + 2z = 0$.)

2.10. Составить уравнение плоскости в «отрезках», если она проходит через точку $M(6,\ -10,\ 1)$ и отсекает на оси Ox отрезок $a = -3$, а на оси Oz — отрезок $c = 2$. $\left(\textit{Ответ:} \frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1.\right)$

2.11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2,\ 3,\ -4)$ параллельно двум векторам $\mathbf{a} = (4,\ 1,\ -1)$ и $\mathbf{b} = (2,\ -1,\ 2)$. (*Ответ:* $x - 10y - 6z + 4 = 0$.)

2.12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,\ 1,\ 0)$, $B(2,\ -1,\ -1)$ перпендикулярно к плоскости $5x + 2y + 3z - 7 = 0$. (*Ответ:* $x + 2y - 3z - 3 = 0$.)

2.13. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярио к двум плоскостям $2x - 3y + z - 1 = 0$ и $x - y + 5z + 3 = 0$. (*Ответ:* $14x + 9y - z = 0$.)

2.14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3,\ -1,\ 2)$, $B(2,\ 1,\ 4)$ параллельно вектору $\mathbf{a} = (5,\ -2,\ -1)$. (*Ответ:* $2x + 9y - 8z + 19 = 0$.)

2.15. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{AB}$, если $A(5,\ -2,\ 3)$, $B(1,\ -3,\ 5)$. (*Ответ:* $4x + y - 2z = 0$.)

2.16. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(2,\ -3,\ 3)$ параллельно плоскости $3x + y - 3z = 0$. (*Ответ:* $-2,\ -6,\ 2$.)

2.17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,\ -1,\ 2)$ перпендикулярно к отрезку M_1M_2, если $M_1(2,\ 3,\ -4)$, $M_2(-1,\ 2,\ -3)$. (*Ответ:* $3x + y - z = 0$.)

2.18. Показать, что прямая $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x + 3y - 2z - 1 = 0$, а прямая $x = t + 7,\ y = t - 2,\ z = 2t + 1$ лежит в этой плоскости.

2.19. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3,\ -4,\ 1)$ параллельно координатной плоскости Oxz. (*Ответ:* $y + 4 = 0$.)

2.20. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $M(3,\ -5,\ 2)$. (*Ответ:* $2x - 3z = 0$.)

2.21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1, 2, 3)$ и $N(-3, 4, -5)$ параллельно оси Oz. (*Ответ:* $x+2y-5=0$.)

2.22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, 3, -1)$ и прямую $x=t-3$, $y=2t+5$, $z=-3t+1$. (*Ответ:* $10x+13y+12z-47=0$.)

2.23. Найти проекцию точки $M(4, -3, 1)$ на плоскость $x-2y-z-15=0$. (*Ответ:* $M_1(5, -5, 0)$.)

2.24. Определить, при каком значении B плоскости $x-4y+z-1=0$ и $2x+By+10z-3=0$ будут перпендикулярны. (*Ответ:* $B=3$.)

2.25. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2, -3, -4)$ и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины. (*Ответ:* $x+y+z+5=0$.)

2.26. При каких значениях n и A прямая $\frac{x}{3}=\frac{y-5}{n}=\frac{z+5}{6}$ перпендикулярна к плоскости $Ax+2y-2z-7=0$? (*Ответ:* $A=-1$, $n=-6$.)

2.27. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 3, -1)$, $B(1, 1, 4)$ перпендикулярно к плоскости $x-4y+3z+2=0$. (*Ответ:* $7x+4y+3z-23=0$.)

2.28. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскостям $x+5y-z+7=0$ и $3x-y+2z-3=0$. (*Ответ:* $9x-5y-16z=0$.)

2.29. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2, 3, -5)$ и $N(-1, 1, -6)$ параллельно вектору $\mathbf{a}=(4, 4, 3)$. (*Ответ:* $2x-5y+4z+31=0$.)

2.30. Определить, при каком значении C плоскости $3x-5y+Cz-3=0$ и $x-3y+2z+5=0$ будут перпендикулярны. (*Ответ:* $C=-9$.)

3. Решить следующие задачи.

3.1. Доказать параллельность прямых $\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ и $x-2y+2z-8=0$, $x+6z-6=0$.

3.2. Доказать, что прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x+y-z=0$, а прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{3}$ лежит в этой плоскости.

3.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1,\ -3,\ 3)$ и образующей с осями координат углы, соответственно равные 60°, 45° и 120°. $\left(Ответ: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{\sqrt{2}} = \frac{z-3}{-1}.\right)$

3.4. Доказать, что прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{6}$ перпендикулярна к прямой

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{aligned}\right\}$$

3.5. Составить параметрические уравнения медианы треугольника с вершинами $A(3,\ 6,\ -7)$, $B(-5,\ 1,\ -4)$, $C(0,\ 2,\ 3)$, проведенной из вершины C. (*Ответ:* $x = 2t$, $y = -3t + 2$, $z = 17t + 3$.)

3.6. При каком значении n прямая $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{n} = \frac{z}{1}$ параллельна прямой

$$\left.\begin{aligned} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (Ответ\colon n = -2.)$$

3.7. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ и плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$. (*Ответ:* $M(2,\ -3,\ 6)$.)

3.8. Найти проекцию точки $P(3,\ 1,\ -1)$ на плоскость $x + 2y + 3z - 30 = 0$. (*Ответ:* $P_1(5,\ 5,\ 5)$.)

3.9. При каком значении C плоскости $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ и $x + 3y + 2z + 5 = 0$ перпендикулярны? (*Ответ:* $C = 6$.)

3.10. При каком значении A плоскость $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ параллельна прямой $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$? (*Ответ:* $A = -1$.)

3.11. При каких значениях m и C прямая $\frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x - 2y + Cz + 1 = 0$? (*Ответ:* $m = -6$, $C = 1{,}5$.)

3.12. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат параллельно прямой $x = 2t + 5$, $y = -3t + 1$, $z = -7t - 4$. $\left(Ответ: \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-7}.\right)$

3.13. Проверить, лежат ли на одной прямой точки $A(0, 0, 2)$, $B(4, 2, 5)$ и $C(12, 6, 11)$. (*Ответ*: лежат.)

3.14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, -5, 3)$ параллельно прямой $2x - y + 3z - 1 = 0$, $5x + 4y - z - 7 = 0$. $\left(\textit{Ответ}: \frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}.\right)$

3.15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, -3, 4)$ перпендикулярно к прямым $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1}$ и $\frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-3}$. $\left(\textit{Ответ}: \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-4}{3}.\right)$

3.16. При каких значениях A и B плоскость $Ax + By + 6z - 7 = 0$ перпендикулярна к прямой $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}$? (*Ответ*: $A = 4$, $B = -8$.)

3.17. Показать, что прямая $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x + 3y - 2z + 1 = 0$, а прямая $x = t + 7$, $y = t - 2$, $z = 2t + 1$ лежит в этой плоскости.

3.18. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $K(-3, 1, -2)$. (*Ответ*: $x + 3y = 0$.)

3.19. Показать, что прямые $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ и $3x + y - 5z + 1 = 0$, $2x + 3y - 8z + 3 = 0$ перпендикулярны.

3.20. При каком значении D прямая $3x - y + 2z - 6 = 0$, $x + 4y - z + D = 0$ пересекает ось Oz? (*Ответ*: $D = 3$.)

3.21. При каком значении p прямые

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t + 5, \\ y &= -t + 2, \\ z &= pt - 7 \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

параллельны? (*Ответ*: $p = -5$.)

3.22. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x - y + 2z - 8 = 0$. (*Ответ*: $M(2, 0, 1)$.)

3.23. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $K(2, -5, 3)$ параллельно плоскости Oxz. (*Ответ*: $y+5=0$.)

3.24. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $x+2y-z+5=0$ с плоскостью, проходящей через ось Oy и точку $M(5, 3, 2)$. (*Ответ*: $x+2y-z+5=0$, $2x-5z=0$.)

3.25. При каких значениях B и D прямая $x-2y+$ $+z-9=0$, $3x+By+z+D=0$ лежит в плоскости Oxy? (*Ответ*: $B=-6$, $D=-27$.)

3.26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, 3, 3)$ параллельно двум векторам $\mathbf{a}=$ $=(-1, -3, 1)$ и $\mathbf{b}=(4, 1, 6)$. (*Ответ*: $19x-10y-11z+$ $+25=0$.)

3.27. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $E(3, 4, 5)$ параллельно оси Ox. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \frac{x-3}{1}=\right.$ $\left.=\frac{y-4}{0}=\frac{z-5}{0}.\right)$

3.28. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(2, 3, 1)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+1}{2}=$ $=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}.\right)$

3.29. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1, -5, 3)$ перпендикулярно к прямым $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1}$ и $x=3t+1$, $y=-t-5$, $z=$ $=2t+3$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \frac{x-1}{5}=\frac{y+5}{-7}=\frac{z-3}{-11}.\right)$

3.30. Найти точку, симметричную точке $M(4, 3, 10)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$. (*Ответ*: $M_1(2, 9, 6)$.)

Решение типового варианта

1. Даны четыре точки $A_1(4, 7, 8)$, $A_2(-1, 13, 0)$, $A_3(2, 4, 9)$, $A_4(1, 8, 9)$. Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$; б) прямой A_1A_2;

в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_4N, параллельной прямой A_1A_2.

Вычислить:

д) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

е) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

▶ а) Используя формулу (3.4), составляем уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $6x - 7y - 9z + 97 = 0$;

б) Учитывая уравнения прямой, проходящей через две точки (см. формулу (3.9)), уравнения прямой A_1A_2 можно записать в виде

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y-7}{-6} = \frac{z-8}{8};$$

в) Из условия перпендикулярности прямой A_4M и плоскости $A_1A_2A_3$ следует, что в качестве направляющего вектора прямой $\mathbf{s}$ можно взять нормальный вектор $\mathbf{n} = (6, -7, -9)$ плоскости $A_1A_2A_3$. Тогда уравнение прямой A_4M с учетом уравнений (3.8) запишется в виде

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-8}{-7} = \frac{z-9}{-9};$$

г) Так как прямая A_4N параллельна прямой A_1A_2, то их направляющие векторы $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ можно считать совпадающими: $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 = (5, -6, 8)$. Следовательно, уравнение прямой A_4N имеет вид

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-8}{-6} = \frac{z-9}{8};$$

д) По формуле (3.18)

$$\sin\varphi = \frac{|6\cdot 5 + (-7)(-6) + (-9)8|}{\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}\,\sqrt{5^2+(6)^2+8^2}} = \frac{34}{\sqrt{11}\sqrt{166}} \approx 0{,}8;$$

е) В соответствии с формулой (3.5)

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|} = \frac{0\cdot 6 + 0\cdot(-7) + 1\cdot(-9)}{\sqrt{1}\,\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}} = \frac{-9}{\sqrt{166}} \approx -0{,}7.\ ◀$$

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(4, 3, 1)$ и $N(-2, 0, -1)$ параллельно прямой, проведенной через точки $A(1, 1, -1)$ и $B(-3, 1, 0)$.

▶ Согласно формуле (3.9), уравнение прямой AB имеет вид

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{1}.$$

Если плоскость проходит через точку $M(4, 3, 1)$, то ее уравнение можно записать в виде $A(x-4)+B(y-3)+$ $+C(z-1)=0$. Так как эта плоскость проходит и через точку $N(-2, 0, -1)$, то выполняется условие

$$A(-2-4)+B(0-3)+C(-1-1)=0 \text{ или}$$
$$6A+3B+2C=0.$$

Поскольку искомая плоскость параллельна найденной прямой AB, то с учетом условия параллельности (3.16) имеем:

$$-4A+OB+1C=0 \text{ или } 4A-C=0.$$

Решая систему

$$\left.\begin{aligned}6A+3B+2C&=0,\\4A\qquad\quad -C&=0,\end{aligned}\right\}$$

находим, что $C=4A$, $B=-\frac{14}{3}A$. Подставив полученные значения C и B в уравнение искомой плоскости, имеем

$$A(x-4)-\frac{14}{3}A(y-3)+4A(z-1)=0.$$

Так как $A\neq 0$, то полученное уравнение эквивалентно уравнению

$$3(x-4)-14(y-3)+12(z-1)=0. \blacktriangleleft$$

3. Найти координаты x_2, y_2, z_2 точки M_2, симметричной точке $M_1(6, -4, -2)$ относительно плоскости $x+y+$ $+z-3=0$.

▶ Запишем параметрические уравнения прямой M_1M_2, перпендикулярной к данной плоскости: $x=6+t$, $y=$ $=-4+t$, $z=-2+t$. Решив их совместно с уравнением данной плоскости, найдем $t=1$ и, следовательно, точку M пересечения прямой M_1M_2 с данной плоскостью: $M(7,$ $-3, -1)$. Так как точка M является серединой отрезка M_1M_2, то верны равенства (см. пример 1 из § 2.2):

$$7=\frac{6+x_2}{2},\quad -3=\frac{-4+y_2}{2},\quad -1=\frac{-2+z_2}{2},$$

из которых иаходим координаты точки M_2: $x_2 = 8$, $y_2 = -2$, $z_2 = 0$. ◀

ИДЗ-3.2

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

1.1.	$A(-2, 4)$,	$B(3, 1)$,	$C(10, 7)$,
1.2.	$A(-3, -2)$,	$B(14, 4)$,	$C(6, 8)$,
1.3.	$A(1, 7)$,	$B(-3, -1)$,	$C(11, -3)$,
1.4.	$A(1, 0)$,	$B(-1, 4)$,	$C(9, 5)$,
1.5.	$A(1, -2)$,	$B(7, 1)$,	$C(3, 7)$,
1.6.	$A(-2, -3)$,	$B(1, 6)$,	$C(6, 1)$,
1.7.	$A(-4, 2)$,	$B(-6, 6)$,	$C(6, 2)$,
1.8.	$A(4, -3)$,	$B(7, 3)$,	$C(1, 10)$,
1.9.	$A(4, -4)$,	$B(8, 2)$,	$C(3, 8)$,
1.10.	$A(-3, -3)$,	$B(5, -7)$,	$C(7, 7)$,
1.11.	$A(1, -6)$,	$B(3, 4)$,	$C(-3, 3)$,
1.12.	$A(-4, 2)$,	$B(8, -6)$,	$C(2, 6)$,
1.13.	$A(-5, 2)$,	$B(0, -4)$,	$C(5, 7)$,
1.14.	$A(4, -4)$,	$B(6, 2)$,	$C(-1, 8)$,
1.15.	$A(-3, 8)$,	$B(-6, 2)$,	$C(0, -5)$,
1.16.	$A(6, -9)$,	$B(10, -1)$,	$C(-4, 1)$,
1.17.	$A(4, 1)$,	$B(-3, -1)$,	$C(7, -3)$,
1.18.	$A(-4, 2)$,	$B(6, -4)$,	$C(4, 10)$,
1.19.	$A(3, -1)$,	$B(11, 3)$,	$C(-6, 2)$,
1.20.	$A(-7, -2)$,	$B(-7, 4)$,	$C(5, -5)$,
1.21.	$A(-1, -4)$,	$B(9, 6)$,	$C(-5, 4)$,
1.22.	$A(10, -2)$,	$B(4, -5)$,	$C(-3, 1)$,
1.23.	$A(-3, -1)$,	$B(-4, -5)$,	$C(8, 1)$,
1.24.	$A(-2, -6)$,	$B(-3, 5)$,	$C(4, 0)$,
1.25.	$A(-7, -2)$,	$B(3, -8)$,	$C(-4, 6)$,
1.26.	$A(0, 2)$,	$B(-7, -4)$,	$C(3, 2)$,
1.27.	$A(7, 0)$,	$B(1, 4)$,	$C(-8, -4)$,
1.28.	$A(1, -3)$,	$B(0, 7)$,	$C(-2, 4)$,

1.29. $A(-5,\ 1)$, $B(8,\ -2)$, $C(1,\ 4)$,
1.30. $A(2,\ 5)$, $B(-3,\ 1)$, $C(0,\ 4)$.

2. Решить следующие задачи.

2.1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-2y-7=0$ и $x+3y-6=0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3. (*Ответ*: $x=3$.)

2.2. Найти проекцию точки $A(-8,\ 12)$ на прямую, проходящую через точки $B(2,\ -3)$ и $C(-5,\ 1)$. (*Ответ*: $A_1(-12,\ 5)$.)

2.3. Даны две вершины треугольника ABC: $A(-4,\ 4)$, $B(4,\ -12)$ и точка $M(4,\ 2)$ пересечения его высот. Найти вершину C. (*Ответ*: $C(8,\ 4)$.)

2.4. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой $2y-x=3$. (*Ответ*: $x-2y+4=0$.)

2.5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,\ -3)$ и точку пересечения прямых $2x-y=5$ и $x+y=1$. (*Ответ*: $x=2$.)

2.6. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция, если $A(3,\ 6)$, $B(5,\ 2)$, $C(-1,\ -3)$, $D(-5,\ 5)$.

2.7. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3,\ 1)$ перпендикулярно к прямой BC, если $B(2,\ 5)$, $C(1,\ 0)$. (*Ответ*: $x+5y-8=0$.)

2.8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2,\ 1)$ параллельно прямой MN, если $M(-3,\ -2)$, $N(1,\ 6)$. (*Ответ*: $2x-y+5=0$.)

2.9. Найти точку, симметричную точке $M(2,\ -1)$ относительно прямой $x-2y+3=0$. (*Ответ*: $M_1(-4/5,\ 23/5)$.)

2.10. Найти точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, если $A(-1,\ -3)$, $B(3,\ 5)$, $C(5,\ 2)$, $D(3,\ -5)$. (*Ответ*: $O(3,\ 1/3)$.)

2.11. Через точку пересечения прямых $6x-4y+5=0$, $2x+5y+8=0$ провести прямую, параллельную оси абсцисс. (*Ответ*: $y=-1$.)

2.12. Известны уравнения стороны AB треугольника ABC $4x+y=12$, его высот BH $5x-4y=12$ и AM $x+y=6$. Найти уравнения двух других сторон треугольника ABC. (*Ответ*: $7x-7y-16=0$, $4x+5y-28=0$.)

2.13. Даны две вершины треугольника ABC: $A(-6,\ 2)$, $B(2,\ -2)$ и точка пересечения его высот $H(1,\ 2)$. Найти координаты точки M пересечения стороны AC и высоты BH. (*Ответ*: $M(10/17,\ 62/17)$.)

2.14. Найти уравнения высот треугольника ABC, проходящих через вершины A и B, если $A(-4,\ 2)$, $B(3,\ -5)$, $C(5,\ 0)$. (*Ответ*: $3x+5y+2=0$, $9x+2y-28=0$.)

2.15. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника, вершинами которого служат точки $A(2,\ 3)$, $B(0,\ -3)$, $C(6,\ -3)$. (*Ответ*: $M(3,\ -2/3)$.)

2.16. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину A треугольника ABC, зная уравнения его сторон: $AB - 2x-y-3=0$, $AC - x+5y-7=0$, $BC - 3x-2y+13=0$. (*Ответ*: $2x+3y-7=0$.)

2.17. Дан треугольник с вершинами $A(3,\ 1)$, $B(-3,\ -1)$ и $C(5,\ -12)$. Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C. (*Ответ*: $2x+y+2=0$, $d=54/\sqrt{17}\approx 13{,}1$.)

2.18. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x+5y-8=0$ и $2x+3y+4=0$. (*Ответ*: $6x+11y=0$.)

2.19. Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x+5y-15=0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат. (*Ответ*: $5x-3y-25=0$, $5x-3y+9=0$.)

2.20. Даны уравнения сторон четырехугольника: $x-y=0$, $x+3y=0$, $x-y-4=0$, $3x+y-12=0$. Найти уравнения его диагоналей. (*Ответ*: $y=0$, $x=3$.)

2.21. Составить уравнения медианы CM и высоты CK треугольника ABC, если $A(4,\ 6)$, $B(-4,\ 0)$, $C(-1,\ -4)$. (*Ответ*: $7x-y+3=0$ (CM), $4x+3y+16=0$ (CK).)

2.22. Через точку $P(5,\ 2)$ провести прямую: а) отсекающую равные отрезки на осях координат; б) параллельную оси Ox; в) параллельную оси Oy. (*Ответ*: $x+y-7=0$, $y=2$, $x=5$.)

2.23. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2,\ 3)$ и составляющей с осью Ox угол: а) 45°, б) 90°, в) 0°. (*Ответ*: $x-y+5=0$, $x+2=0$, $y-3=0$.)

2.24. Какую ординату имеет точка C, лежащая на одной прямой с точками $A(-6,\ -6)$ и $B(-3,\ -1)$ и имеющая абсциссу, равную 3? (*Ответ*: $y=9$.)

2.25. Через точку пересечения прямых $2x-5y-1=0$ и $x+4y-7=0$ провести прямую, делящую отрезок между точками $A(4,\ -3)$ и $B(-1,\ 2)$ в отношении $\lambda=2/3$. (*Ответ*: $2x-y-5=0$.)

2.26. Известны уравнения двух сторон ромба $2x-5y-1=0$ и $2x-5y-34=0$ и уравнение одной из его диагоналей $x+3y-6=0$. Найти уравнение второй диагонали. (*Ответ*: $3x-y-23=0$.)

2.27. Найти точку E пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки $A(-3, 1)$, $B(7, 5)$ и $C(5, -3)$. (*Ответ*: $E(3, 1)$.)

2.28. Записать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1, 1)$ под углом 45° к прямой $2x+3y=6$. (*Ответ*: $x-5y+6=0$, $5x+y+4=0$.)

2.29. Даны уравнения высот треугольника ABC $2x-3y+1=0$, $x+2y+1=0$ и координаты его вершины $A(2, 3)$. Найти уравнения сторон AB и AC треугольника. (*Ответ*: $2x-y-1=0$ (AB), $3x+2y-12=0$ (AC).)

2.30. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x-2y=0$, $x-y-1=0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3, -1)$. Найти уравнения двух других сторон. (*Ответ*: $x-y-7=0$, $x-2y-10=0$.)

Решение типового варианта

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(4, 3)$, $B(-3, -3)$, $C(2, 7)$. Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

▶ а) Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки (см. формулу (3.9)), получим уравнение стороны AB:

$$\frac{x-4}{-3-4}=\frac{y-3}{-3-3},$$

откуда

$$6(x-4)=7(y-3) \text{ или } 6x-7y-3=0;$$

б) Согласно уравнению (3.20), угловой коэффициент прямой AB $k_1=6/7$. С учетом условия перпендикулярности прямых AB и CH (см. формулу (3.28)) угловой коэффициент высоты CH $k_2=-7/6$ ($k_1k_2=-1$). По точке $C(2, 7)$ и угловому коэффициенту $k_2=-7/6$ составляем уравнение высоты CH (см. уравнение (3.21)):

$$y-7=-\frac{7}{6}(x-2) \text{ или } 7x+6y-56=0;$$

в) По известным формулам (см. § 2.2) находим координаты x, y середины M отрезка BC:

$$x=(-3+2)/2=-1/2,\quad y=(-3+7)/2=2.$$

Теперь по двум известным точкам A и M составляем уравнение медианы AM:

$$\frac{x-4}{-1/2-4}=\frac{y-3}{2-3}\ \text{или}\ 2x-9y+19=0;$$

г) Для нахождения координат точки N пересечения медианы AM и высоты CH составляем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l}7x+6y-56=0,\\ 2x-9y+19=0.\end{array}\right\}$$

Решая ее, получаем $N(26/5,\ 49/15)$;

д) Так как прямая, проходящая через вершину C, параллельна стороне AB, то их угловые коэффициенты равны $k_1=6/7$. Тогда, согласно уравнению (3.21), по точке C и угловому коэффициенту k_1 составляем уравнение прямой CD:

$$y-7=\frac{6}{7}(x-2)\ \text{или}\ 6x-7y+37=0;$$

е) Расстояние от точки C до прямой AB вычисляем по формуле (3.29):

$$d=|CH|=\frac{|6\cdot 2-7\cdot 7-3|}{\sqrt{6^2+(-7)^2}}=\frac{40}{\sqrt{85}}\approx 4{,}4.$$

Решение данной задачи проиллюстрировано на рис. 3.4. ◁

2. Известны вершины $O(0,\ 0)$, $A(-2,\ 0)$ параллелограмма $OACD$ и точка пересечения его диагоналей $B(2,\ -2)$. Записать уравнения сторон параллелограмма.

▶ Уравнение стороны OA можно записать сразу: $y=0$. Далее, так как точка B является серединой диагонали AD (рис. 3.5), то по формулам деления отрезка пополам (см. § 2.2) можно вычислить координаты вершины $D(x,\ y)$:

$$2=\frac{-2+x}{2},\quad -2=\frac{0+y}{2},$$

откуда $x=6$, $y=-4$.

Теперь можно найти уравнения всех остальных сторон. Учитывая параллельность сторон OA и CD, составляем уравнение стороны CD: $y=-4$. Уравнение стороны OD составляем по двум известным точкам:

$$\frac{x-0}{6-0}=\frac{y-0}{-4-0},$$

откуда $y=-\frac{2}{3}x$, $2x+3y=0$.

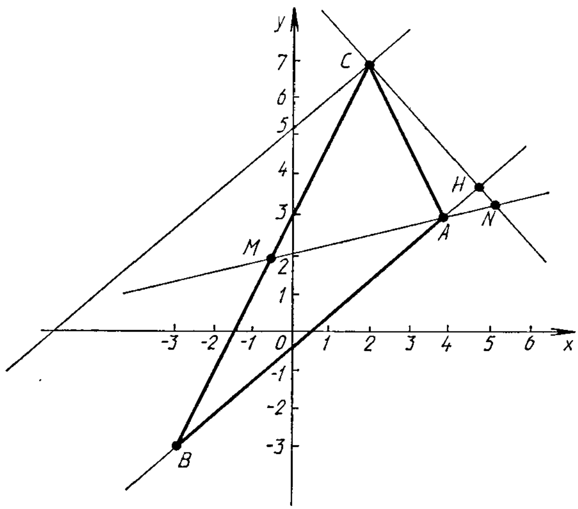


Рис. 3.4

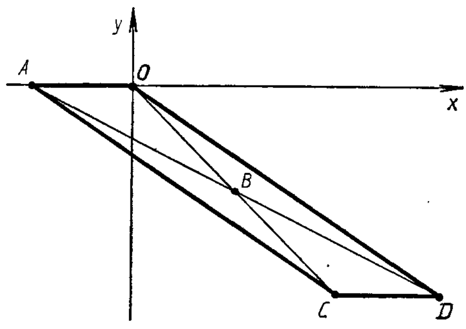


Рис. 3.5

Наконец, уравнение стороны AC находим, учитывая тот факт, что она проходит через известную точку $A(-2, 0)$ параллельно известной прямой OD (см. уравнение (3.21)):

$$y-0=-\frac{2}{3}(x+2) \text{ или } 2x+3y+4=0. \blacktriangleleft$$

3.5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 3

1. Составить уравнение биссектрисы того угла между прямыми $x-7y=1$ и $x+y=-7$, внутри которого лежит точка $A(1,\ 1)$. (*Ответ*: $3x-y+17=0$.)

2. Составить уравнения сторон параллелограмма $ABCD$, зная, что его диагонали пересекаются в точке $M(1,\ 6)$, а стороны AB, BC, CD и DA проходят соответственно через точки $P(3,\ 0)$, $Q(6,\ 6)$, $R(5,\ 9)$, $S(-5,\ 4)$. (*Ответ*: $x+2y-3=0$, $2x-y-6=0$, $x+2y-23=0$, $2x-y+14=0$.)

3. Дано уравнение стороны ромба $x+3y-8=0$ и уравнение его диагонали $2x+y+4=0$. Записать уравнения остальных сторон ромба, зная, что точка $A(-9,\ -1)$ лежит на стороне, параллельной данной. (*Ответ*: $x+3y+12=0$, $3x-y-4=0$, $3x-y+16=0$.)

4. Зная уравнения двух сторон треугольника ABC $2x+3y-6=0$ (AB), $x+2y-5=0$ (AC) и внутренний угол при вершине B, равный $\pi/4$, записать уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. (*Ответ*: $x-5y+23=0$.)

5. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(2,\ -4)$ и уравнения биссектрис двух его углов: $x+y-2=0$ и $x-3y-6=0$. (*Ответ*: $x+7y-6=0$, $x-y-6=0$, $7x+y-10=0$.)

6. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(-4,\ 2)$ и уравнения двух медиан: $3x-2y+2=0$ и $3x+5y-12=0$. (*Ответ*: $2x+y-8=0$, $x-3y+10=0$, $x+4y-4=0$.)

7. В треугольнике с вершинами $A(-3,\ -1)$, $B(1,\ -5)$, $C(9,\ 3)$ стороны AB и AC разделены в отношении $\lambda=3$, считая от общей вершины A. Доказать, что прямые, соединяющие точки деления с противоположными вершинами, и медиана пересекаются в одной точке.

8. Прямые $3x+4y-30=0$ и $3x-4y+12=0$ касаются окружности, радиус которой $R=5$. Вычислить площадь четырехугольника, образованного этими касательными и радиусами круга, проведенными в точки касания. (*Ответ*: $S\approx 1{,}68$.)

9. Даны две точки $A(-3,\ 8)$ и $B(2,\ 2)$. На оси Ox найти такую точку M, чтобы ломаная линия AMB имела наименьшую длину. (*Ответ*: $M(1,\ 0)$.)

10. Показать, что прямые $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$

и $x=3z-4$, $y=z+2$ пересекаются, и найти точку A их пересечения. (*Ответ*: $A(-1, 3, 1)$.)

11. Найти расстояние от точки $P(7, 9, 7)$ до прямой $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$. (*Ответ*: $\sqrt{22}$.)

12. Найти кратчайшее расстояние между двумя непересекающимися прямыми: $\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$ и $\frac{x}{-2}=$ $=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$. (*Ответ*: 7.)

13. Даны вершины треугольника $A(4, 1, -2)$, $B(2, 0, 0)$, $C(-2, 3, -5)$. Составить уравнения его высоты, опущенной из вершины B на противолежащую сторону. $\Big($*Ответ*: $\frac{x-2}{74}=\frac{y}{57}=\frac{z}{-110}$.$\Big)$

14. Дан куб, длина ребра которого равна единице. Вычислить расстояние от вершины куба до его диагонали, не проходящей через эту вершину. (*Ответ*: $d=\sqrt{2/3}$.)

15. На плоскости Oxy найти такую точку M, сумма расстояний которой до точек $A(-1, 2, 5)$ и $B(11, -16, 10)$ была бы наименьшей. (*Ответ*: $M(3, -4, 0)$.)

16. Точка $M(x, y, z)$ движется прямолинейно и равномерно из начального положения $M_0(15, -24, -16)$ со скоростью $v=12$ в направлении вектора $\mathbf{s}=(-2, 2, 1)$. Убедившись, что траектория движения точки M пересекает плоскость $3x+4y+7z-17=0$, найти координаты точки M_1 их пересечения. (*Ответ*: $M_1(-25, 16, 4)$.)

17. Доказать, что прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$ и $\frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}$ лежат в одной плоскости, и составить уравнение этой плоскости. (*Ответ*: $2x-16y-13z+$ $+31=0$.)

18. Найти проекцию точки $C(3, -4, -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13}=$ $=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}$. (*Ответ*: $C_1(2,$ $-3, -5)$.)

19. На плоскости Oxy через точку $M(4, -3)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного ею и осями координат, была равна 3. (*Ответ*: $3x+2y-$ $-6=0$ или $3x+8y+12=0$.)

20. Нужно восстановить границы квадратного участка земли по трем сохранившимся столбам: один — в центре участка, остальные — на двух противоположных границах. На плане положение центрального столба определено точкой $M(1, 6)$, а боковых — точками $A(5, 9)$ и $B(3, 0)$. Составить уравнения прямых, изображающих границы участка. (*Ответ*: $x + 2y - 23 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 6 = 0$, $2x - y + 14 = 0$.)

21. Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$ перпендикулярно к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

22. Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит параллельно плоскостям $3x + 12y - 3z - 5 = 0$, $3x - 4y + 9z + 7 = 0$ и пересекает прямые $\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}$, $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$. (*Ответ*: $x = 8t - 3$, $y = -3t - 1$, $z = -4t + 2$.)

4. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

4.1. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линией (кривой) второго порядка называется множество M точек плоскости, декартовы координаты x, y которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \tag{4.1}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0 — постоянные действительные числа. Уравнение (4.1) называется *общим уравнением линии второго порядка.*

Рассмотрим частные случаи уравнения (4.1).

1. Окружность радиусом R с центром в точке $C(x_0, y_0)$ задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{4.2}$$

2. Эллипс с полуосями a и b, центром в начале координат и вершинами A, A', B, B', расположенными на осях координат, определяется простейшим (каноническим) уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4.3}$$

На рис. 4.1, *а* изображен эллипс, у которого $a > b$ (a — большая полуось, b — малая), а на рис. 4.1, *б* — эллипс, у которого $a < b$ (a —

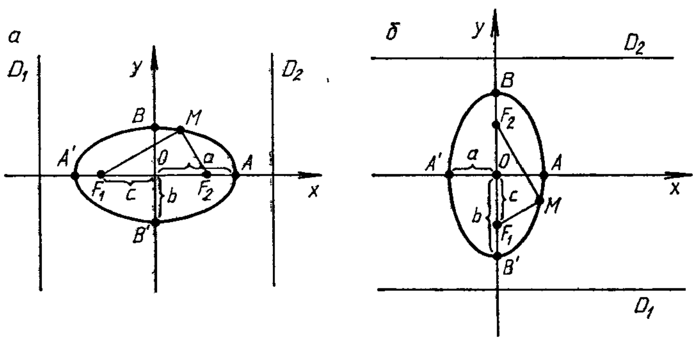


Рис. 4.1

малая полуось, b — большая). Точки F_1 и F_2 называют *фокусами.* По определению любая точка эллипса M удовлетворяет условию $F_1M + F_2M = 2a$ в случае $a > b$ или $F_1M + F_2M = 2b$ в случае $a < b$. Если обозначить $c = OF_1 = OF_2$, то в первом случае $b^2 = a^2 - c^2$, а во втором

$a^2 = b^2 - c^2$. Прямые D_1 и D_2 называются *директрисами эллипса*; их уравнения по определению имеют вид

$$x = \pm a/\varepsilon = \pm a^2/c,$$

если $a > b$, или

$$y = \pm b/\varepsilon = \pm b^2/c,$$

если $a < b$ (см. рис. 4.1). Оси координат являются осями симметрии эллипса.

Число ε, равное отношению расстояния между фокусами F_1F_2 к длине большой оси, называется *эксцентриситетом эллипса:*

$$\varepsilon = c/a \ (a > b) \text{ и } \varepsilon = c/b \ (a < b).$$

В любом случае $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

3. Гипербола с действительной полуосью a, мнимой полуосью b, центром в начале координат и вершинами A и A' на оси Ox имеет следующее каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (4.4)$$

На рис. 4.2 изображена гипербола с асимптотами C_1 и C_2 $\left(y = \pm \frac{b}{a} x\right)$, эксцентриситетом $\varepsilon = c/a$, директрисами D_1 и D_2 ($x = \pm a/\varepsilon$), фокусами $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Для гиперболы всегда справедливо равенство $b^2 = c^2 - a^2$, и поэтому $\varepsilon = \sqrt{1 + b^2/a^2} > 1$. Для любой точки M выполняется условие $|F_1M - F_2M| = 2a$, которое может служить определением гиперболы.

Гипербола, уравнение которой имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4.5)$$

называется *сопряженной с гиперболой (4.4)*. Ее вершины находятся в точках B и B' на оси Oy, асимптоты совпадают с асимптотами гиперболы (4.4), $\varepsilon = c/b$ (см. рис. 4.2). Как и в случае эллипса, оси координат являются осями симметрии гиперболы.

4. Парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно оси Ox, имеет следующее каноническое уравнение:

$$y^2 = 2px.$$

Она изображена на рис. 4.3. Точка $F(p/2, 0)$ называется *фокусом*, а прямая D, задаваемая уравнением $x = -p/2$,— *директрисой параболы*. Для любой точки M параболы верно равенство $FM = MN$. Число $p > 0$ называется *параметром параболы*. Ось Ox является ее осью симметрии.

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ определяют параболы, иначе ориентированные относительно осей координат (рис. 4.4, *а—в*).

Замечание. Уравнения вида

$$\frac{(x - x_0)^2}{2} \pm \frac{(y - y_0)^2}{2} = 1, \ (y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

определяют соответственно эллипс, гиперболу и параболу, которые параллельно смещены относительно системы координат Oxy таким образом, что центр эллипса и гиперболы и вершина параболы находятся в точке $C(x_0, y_0)$.

Директрисы, фокусы и точки эллипса, гиперболы и параболы обладают одним замечательным свойством: отношение расстояния от любой точки M кривой до фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей выбранному фокусу директрисы есть величина постоянная, равная

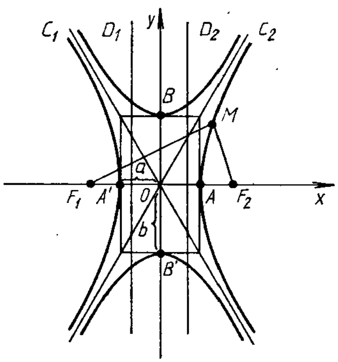


Рис. 4.2

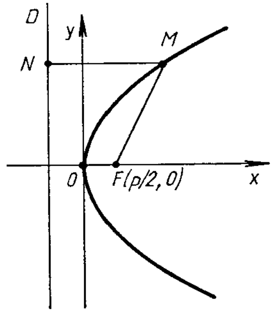


Рис. 4.3

эксцентриситету кривой. У параболы эксцентриситет следует считать равным 1. Это свойство можно принять за определение кривых второго порядка.

Пример 1. Даны точка $A(1, 0)$ и прямая $x = 2$. В декартовых координатах составить уравнение линии, каждая точка $M(x, y)$ которой: а) в два раза ближе к точке A, чем к данной прямой; б) в два раза дальше от точки A, чем от данной прямой; в) равноудалена от точки A и прямой $x = 2$.

▶ а) По условию $2MA = MN$ (рис. 4.5). Отсюда, так как $N(2, y)$, то

$$2\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2}, \quad 4(x^2-2x+1+y^2) = x^2-4x+4,$$
$$3x^2+4y^2-4x=0, \quad 3(x^2-(4/3)x+4/9)+4y^2=4/3,$$
$$3(x-2/3)^2+4y^2=4/3, \quad \frac{(x-2/3)^2}{4/9}+\frac{y^2}{1/3}=1.$$

Следовательно, искомая линия — эллипс. Точка A совпадает с правым его фокусом, а прямая $x = 2$ — правая директриса;

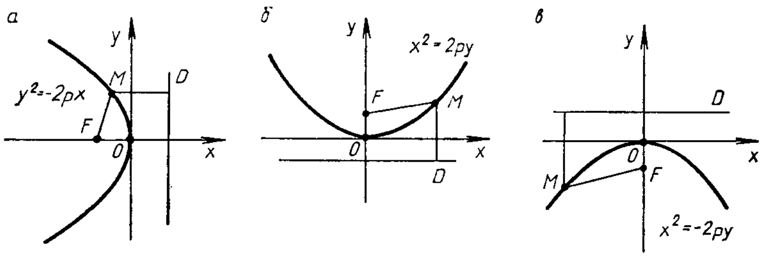


Рис. 4.4

б) По условию $MA = 2MN$ (рис. 4.6). Следовательно,

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-2)^2},$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4x^2 - 16x + 16,\ 3x^2 - y^2 - 14x + 15 = 0,$$
$$3(x^2 - (14/3)x + 49/9) - y^2 = 49/3 - 15 = 4/3,$$
$$\frac{(x-7/3)^2}{4/9} - \frac{y^2}{4/3} = 1,$$

т. е. данная линия — гипербола. Точка A совпадает с ее левым фокусом, $x = 2$ — левая директриса;

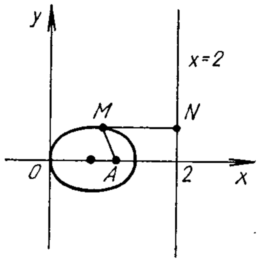


Рис. 4.5

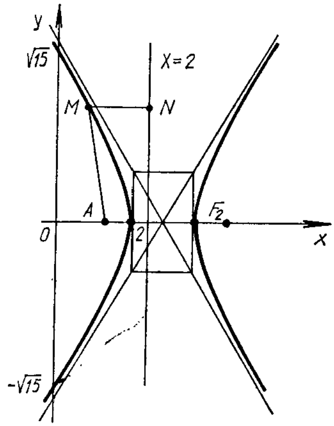


Рис. 4.6

в) По условию $MA = MN$ (рис. 4.7). Следовательно,

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2},\ x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 4x + 4,$$
$$y^2 = -2x + 3,\ y^2 = -2(x - 3/2).$$

Получили уравнение параболы (см. рис. 4.7). Точка A совпадает с фокусом, прямая $x = 2$ — директриса. ◀

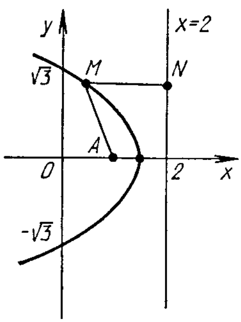


Рис. 4.7

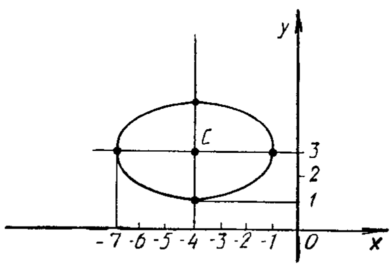


Рис. 4.8

Если общее уравнение (4.1) определяет эллипс, гиперболу или параболу, то поворотом около начала координат осей координат на угол α, определяемый из уравнения $\operatorname{tg} 2\alpha = 2a_{12}/(a_{11} - a_{22})$, и параллельным переносом этих осей всегда можно добиться того, чтобы в новой системе координат уравнения данных кривых стали каноническими.

Особенно простым является приведение уравнения (4.1) к каноническому виду в случае $a_{12} = 0$, когда можно применить *метод выделения полных квадратов*.

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение линии $4x^2 + 9y^2 + 32x - 54y + 109 = 0$ и построить ее.

▶ Дополним члены, содержащие x, и члены, содержащие y, до полных квадратов. Получим

$$4(x^2 + 8x + 16) + 9(y^2 - 6y + 9) = 64 + 81 - 109 = 36,$$

$$4(x + 4)^2 + 9(y - 3)^2 = 36, \quad \frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1,$$

т. е. имеем эллипс, центр которого лежит в точке $C(-4, 3)$, большая полуось $a = 3$, малая полуось $b = 2$ (рис. 4.8). ◀

АЗ-4.1

1. Дан эллипс, каноническое уравнение которого имеет вид $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Найти координаты его фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис. Сделать рисунок. (*Ответ:* $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, $\varepsilon = 0{,}8$, $x = \pm 25/4$.)

2. По каноническому уравнению гиперболы $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ найти ее полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис. Сделать рисунок.

3. Построить параболу, ее директрису и фокус, зная каноническое уравнение параболы: $x^2 = 6y$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что:

а) его малая ось равна 24, расстояние между фокусами равно 10;

б) расстояние между фокусами равно 6, эксцентриситет равен 3/5;

в) расстояние между фокусами равно 4, расстояние между директрисами равно 5;

г) расстояние между директрисами равно 32, эксцентриситет равен 0,5.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:

а) расстояние между вершинами равно 8, расстояние между фокусами равно 10;

б) действительная полуось равна 5, вершины делят расстояние между центром и фокусом пополам;

в) действительная ось равна 6, гипербола проходит через точку $A(9, -4)$;

г) точки $P(-5, 2)$ и $Q(2\sqrt{5}, 2)$ лежат на гиперболе.

6. Составить каноническое уравнение параболы, если известно, что:

а) парабола имеет фокус $F(0, 2)$ и вершину в точке $O(0, 0)$;

б) парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точки $O(0, 0)$ и $M(1, -4)$;

в) парабола симметрична относительно оси ординат Oy и проходит через точки $O(0, 0)$ и $N(6, -2)$.

7. С помощью выделения полных квадратов и переноса начала координат упростить уравнения линий, определить их тип, размеры и расположение на плоскости (сделать рисунок):

а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$;
б) $2x^2 + 5y^2 + 8x - 10y - 17 = 0$;
в) $x^2 - 6y^2 - 12x + 36y - 48 = 0$;
г) $x^2 - 8x + 2y + 18 = 0$.

Самостоятельная работа

1. Найти уравнение окружности, если концы одного из ее диаметров находятся в точках $A(3, 9)$ и $B(7, 3)$. (*Ответ:* $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 13$.)

2. Составить уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах эллипса $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$, а фокусы в его вершинах. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1.\right)$

3. Составить уравнение траектории движения точки $M(x, y)$, если в любой момент времени она остается равноудаленной от точки $A(8, 4)$ и оси ординат. (*Ответ:* $(y-4)^2 = 16(x-4)$ — парабола.)

4. Записать уравнение траектории движения точки $M(x, y)$, если в любой момент времени она находится в 1,25 раза дальше от точки $A(5, 0)$, чем от прямой $5x - 16 = 0$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.\right)$

5. Ракета, пуск которой произведен под острым углом к горизонту, описала дугу параболы и упала на расстоянии 60 км от места старта. Зная, что наибольшая высота, достигнутая ракетой, равна 18 км, записать уравнение параболической траектории, приняв место старта за начало координат, а место падения — лежащим на положительной полуоси Ox, и определить параметр траектории. (*Ответ:* $(x-30)^2=-50(y-18)$, $p=25$ км.)

4.2. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, декартовы координаты x, y которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+$$
$$+2a_2y+2a_3z+a_0=0,$$

где коэффициенты a_{11}, a_{22}, ..., a_0 — постоянные числа. Это уравнение называется *общим уравнением поверхности второго порядка.*

Существует девять классов невырожденных поверхностей второго порядка, канонические уравнения которых можно получить из общего уравнения с помощью преобразований системы координат (параллельного переноса и поворота в пространстве осей координат). В результате этих преобразований получаем следующие канонические уравнения:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \textit{(эллипсоиды)}, \tag{4.6}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \textit{(однополостные гиперболоиды)}, \tag{4.7}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \textit{(двуполостные гиперболоиды)}, \tag{4.8}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \textit{(конусы второго порядка)}, \tag{4.9}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \quad \textit{(эллиптические параболоиды)}, \tag{4.10}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \quad \textit{(гиперболические параболоиды)}, \tag{4.11}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \textit{(эллиптические цилиндры)}, \tag{4.12}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \textit{(гиперболические цилиндры)}, \tag{4.13}$$

$$x^2=2py \quad \textit{(параболические цилиндры)}. \tag{4.14}$$

Здесь параметры a, b, c, p — постоянные и положительные числа, характеризующие в определенном смысле свойства поверхностей.

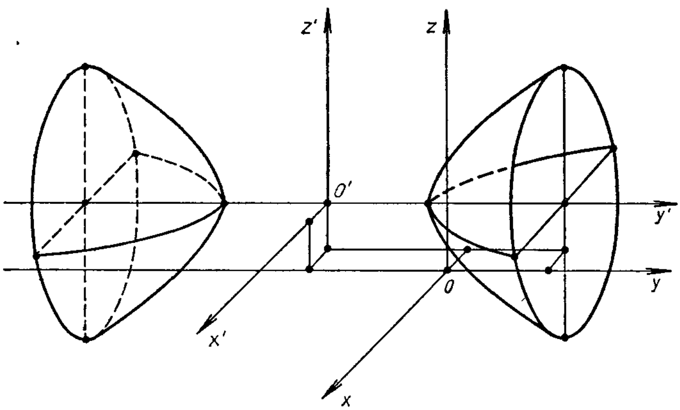
Получение канонического уравнения из общего является довольно сложной процедурой, но в случае отсутствия членов с xy, xz, yz ($a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$) приведение общего уравнения к каноническому виду достигается (как и в случае линий второго порядка) методом выделения полных квадратов и параллельным переносом осей координат.

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение x^2-2y^2+ $+4z^2+2x-12y-8z-3=0$, выяснить тип, свойства и расположение заданной этим уравнением поверхности относительно системы координат $Oxyz$.

▶ Выделив полные квадраты при входящих в уравнение переменных (т. е. сгруппировав члены уравнения указанным ниже образом), имеем:

$$(x^2+2x+1-1)-2(y^2+6y+9-9)+4(z^2-2z+1-1)-3=0,$$
$$(x+1)^2-2(y+3)^2+4(z-1)^2=3+1-18+4=-10,$$
$$\frac{(x+1)^2}{10}-\frac{(y+3)^2}{5}+\frac{(z-1)^2}{5/2}=-1.$$

При параллельном переносе осей координат, задаваемом формулами: $x'=x+1$, $y'=y+3$, $z'=z-1$, начало координат новой си-



Р и с. 4.9

стемы окажется в точке $O'(-1,\ -3,\ 1)$, а уравнение поверхности примет канонический вид

$$\frac{x'^2}{10}-\frac{y'^2}{5}+\frac{z'^2}{5/2}=-1.$$

Следовательно, данная поверхность — двуполостный гиперболоид, который имеет $a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{5}$, $c=\sqrt{5/2}$, вытянут вдоль новой оси $O'y'$, а центр его находится в точке $O'(-1,\ -3,\ 1)$ (рис. 4.9). ◀

Форма и свойства всех перечисленных выше поверхностей второго порядка (4.6) — (4.14) устанавливаются с помощью *метода параллельных сечений*. Суть метода состоит в том, что поверхности пересекаются плоскостями, параллельными координатным плоскостям, а затем по виду и свойствам получаемых в сечениях линий делается вывод о форме и свойствах самой поверхности.

Пример 2. Установить форму и свойства однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$. Сделать рисунок.

▶ Будем пересекать поверхность горизонтальными плоскостями $z=h$. Из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1+\frac{h^2}{9},\\&z=h\end{aligned}\right\}$$

видно, что в любом таком сечении получается эллипс с полуосями $a_1=4\sqrt{1+h^2/9}$, $b_1=2\sqrt{1+h^2/9}$. Сечение плоскостями $x=h$ дает гиперболы:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1-\frac{h^2}{4},\\&x=h,\end{aligned}\right\}$$

а сечение плоскостями $y=h$ — гиперболы:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1-\frac{h^2}{4},\\&y=h\end{aligned}\right\}$$

(только с другими полуосями).

При $h=0$ получим сечения поверхности (однополостного гиперболоида) координатными плоскостями $z=0$, или $x=0$, или $y=0$. Эти сечения называются *главными* (рис. 4.10). Размеры главных сечений очевидны: в плоскости $z=0$ эллипс имеет полуоси $a=4$, $b=2$; в плоскости $x=0$ гипербола имеет действительную полуось $b=2$, мнимую $c=3$; в плоскости $y=0$ гипербола имеет действительную полуось $a=4$, мнимую $c=3$. Координатные плоскости являются плоскостями симметрии поверхности. ◀

В инженерных задачах часто встречаются различные *поверхности вращения*, т. е. поверхности, получаемые вращением некоторой плоской линии вокруг заданной прямой (называемой *осью поверхности вращения*), лежащей с этой линией в одной плоскости.

Если линия лежит в плоскости Oyz и имеет уравнения $F(y, z)=0$, $x=0$, то при вращении ее вокруг оси Oz получаем поверхность вращения, уравнение которой имеет вид $F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right)=0$; если вращение совершать вокруг оси Oy, то уравнение поверхности вращения (другой!) запишется в виде $F\left(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$.

Пример 3. Записать уравнение поверхности вращения, полученной при вращении гиперболы $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$: а) вокруг оси Oz; б) вокруг оси Oy.

▶ а) Согласно изложенному выше правилу, в уравнении гиперболы заменяем y на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ и получаем уравнение поверхности вращения:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1.$$

Это однополостный гиперболоид вращения, у которого в горизонтальных сечениях вместо эллипсов лежат окружности (см. пример 2);

б) При вращении данной гиперболы вокруг оси Oy следует в ее уравнении заменить z на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$. Тогда имеем:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2+z^2}{b^2}=1 \text{ или } \frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=-1.$$

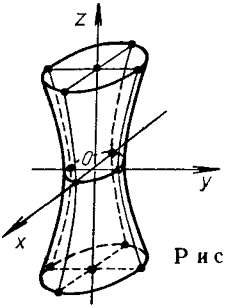


Рис. 4.10

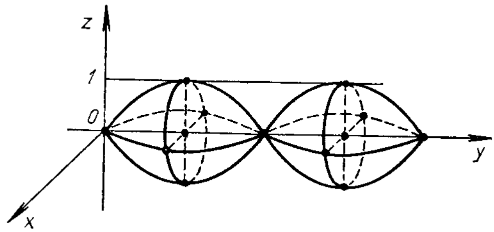


Рис. 4.11

Это двуполостный гиперболоид вращения, вытянутый вдоль оси Oy (см. пример 1), сечения которого плоскостями $y = h > a$ представляют собой окружности, а не эллипсы, как в примере 1. ◀

Пример 4. Составить уравнение поверхности, полученной вращением дуги синусоиды $z = \sin y$, $x = 0$ $(0 \leqslant y \leqslant 2\pi)$ вокруг оси Oy.

▶ Имеем:

$$z = \sin\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad z = \pm\sin\sqrt{x^2 + y^2}$$

(рис. 4.11). ◀

АЗ-4.2

1. Методом параллельных сечений исследовать форму поверхности и построить ее:

а) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 2$; б) $2x^2 - 9y^2 - z^2 = 36$;
в) $-2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 0$; г) $2y^2 + z^2 = 2x$;
д) $z^2 - y^2 = x$; е) $2x^2 + 4z^2 = 4$; ж) $y^2 - 6z = 0$.

2. Определить вид поверхности и построить ее:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$;
б) $36x^2 + 16y^2 - 9z^2 + 18z = 9$;
в) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$;
г) $5x^2 + y^2 + 10x - 6y - 10z + 14 = 0$;
д) $x^2 + 3z^2 - 8x + 18z + 34 = 0$.

3. Построить тело, ограниченное поверхностями:

а) $x^2 = z$, $z = 0$, $2x - y = 0$, $x + y = 9$;
б) $z^2 = 4 - y$, $x^2 + y^2 = 4y$;
в) $z = y^2$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$;
г) $z = y$, $z = 0$, $y = \sqrt{4 - x}$, $y = \frac{1}{2}(x - 1)$.

Самостоятельная работа

Построить тело, ограниченное указанными поверхностями.

1. $z = 4 - x^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$.
2. $z = 2x^2 + y^2$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.
3. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z + 1 = x^2 + y^2$ $(z \geqslant -1)$.
4. $x^2 + y^2 = z$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.

4.3. ЛИНИИ, ЗАДАННЫЕ УРАВНЕНИЯМИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Полярные координаты точки и уравнение линии в полярных координатах. Положение некоторой точки M на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат Oxy определяется числами x и y, т. е. $M(x, y)$ (рис. 4.12). Эту точку можно задать и другим способом,

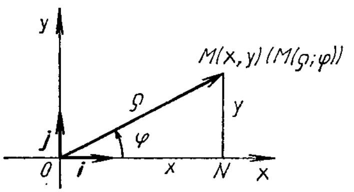


Рис. 4.12

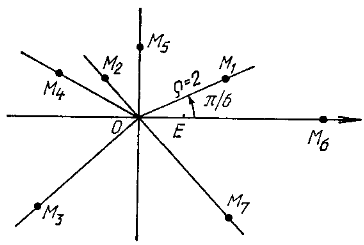


Рис. 4.13

например с помощью расстояния $\rho = |\overrightarrow{OM}|$ и угла φ, отсчитываемого против хода часовой стрелки от оси Ox, называемой *полярной осью*, до радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$. В этом случае используется запись $M(\rho; \varphi)$. Расстояние ρ называется *полярным радиусом*, φ — *полярным углом* точки M, а точка O — *полюсом*.

Связь между декартовыми x, y и полярными ρ, φ координатами точки M при указанном расположении осей Ox и Oy, вектора $\overrightarrow{OM}$ и угла φ выражается формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi,\ \rho \geqslant 0, \\ y &= \rho\sin\varphi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

(см. рис. 4.12). С помощью формул (4.15) можно находить декартовы координаты точки M по ее полярным координатам. Если эти формулы разрешить относительно ρ и φ, то получим формулы:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{4.16}$$

с помощью которых по декартовым координатам точки M легко найти ее полярные координаты.

Формулы (4.15) и (4.16) дают также возможность переходить от уравнений линий, заданных в декартовых координатах, к их уравнениям в полярных координатах, и наоборот.

Пример 1. Построить точки, заданные полярными координатами: $M_1(2;\ \pi/6)$, $M_2(1;\ 3\pi/4)$, $M_3(3;\ 5\pi/4)$, $M_4(2;\ 5\pi/6)$, $M_5(3/2;\ \pi/2)$, $M_6(4;\ 0)$, $M_7(3;\ 7\pi/4)$.

▶ Вначале проведем луч под углом φ к полярной оси Ox, затем на построенном луче отложим от полюса O отрезок длиной ρ. В итоге найдем все семь точек (рис. 4.13). Отрезок OE определяет единицу длины. ◀

Пример 2. Найти декартовы координаты точек $M_1, \ldots, M_7$, заданных в примере 1.

▶ В соответствии с формулами (4.15) имеем: $M_1(\sqrt{3},\ 1)$, $M_2(-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)$, $M_3(-3\sqrt{2}/2,\ -3\sqrt{2}/2)$, $M_4(-\sqrt{3},\ 1)$, $M_5(0, 3/2)$, $M_6(4,\ 0)$, $M_7(3\sqrt{2}/2,\ -3\sqrt{2}/2)$. ◀

Пример 3. Точки заданы декартовыми координатами: $A(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$, $B(0,\ -3)$, $C(\sqrt{3},\ 1)$. Построить эти точки и найти их полярные координаты.

▶ Согласно формулам (4.16), получаем: для точки A $\rho = 2$, $\operatorname{tg}\varphi = -1$, $\varphi = 7\pi/4$, т. е. $A(2;\ 7\pi/4)$; для точки B $\rho = 3$, $\sin\varphi = -1$, $\varphi = 3\pi/2$, значит, $B(3;\ 3\pi/2)$; для точки C $\rho = 2$, $\operatorname{tg}\varphi = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$, $\varphi = \pi/6$, т. е. $C(2;\ \pi/6)$ (рис. 4.14). ◀

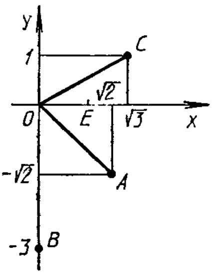


Рис. 4.14

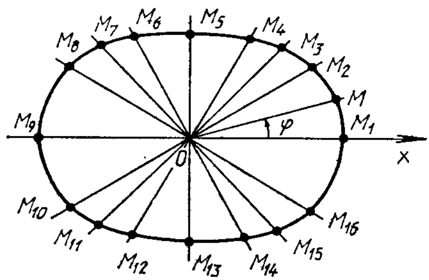


Рис. 4.15

Пример 4. Записать уравнение линии $(x^2+y^2)^{3/2} = 4(x^2-3y^2)$ в полярных координатах.

▶ Воспользовавшись формулами (4.15), подставим в данное уравнение вместо x и y их выражения. Получим

$$\rho^3 = 4(\rho^2\cos^2\varphi - 3\rho^2\sin^2\varphi).$$

Считая $\rho \neq 0$, преобразуем последнее уравнение:

$$\rho = 4(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi - 2\sin^2\varphi),$$
$$\rho = 4(\cos 2\varphi - 1 + \cos 2\varphi),\quad \rho = 4(2\cos 2\varphi - 1). \blacktriangleleft$$

Пример 5. Записать уравнение линии $\rho^2 = 8\sin^2 2\varphi$ в декартовых координатах.

▶ Так как $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$, данное уравнение можно переписать в виде $\rho^2 = 32\sin^2\varphi\cos^2\varphi$ и заменить ρ, $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ их выражениями (см. формулы (4.16)). Тогда найдем:

$$(\sqrt{x^2+y^2})^2 = 32\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2,$$

$$(x^2+y^2)^2 = 32x^2y^2. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Построить кривую, заданную уравнением $\rho = 2 + \cos^2\varphi$.

▶ Составим таблицу, в которой указаны значения φ_i и соответствующие им значения ρ_i $(i = \overline{1, 16})$:

φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i
0	3	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{11}{4}$	$\frac{3}{2}\pi$	2	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{11}{4}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	2	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{11}{4}$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{9}{4}$	2π	3
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{9}{4}$	π	3	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{5}{2}$		

Построив найденные точки $M_i(\rho_i, \varphi_i)$ (см. пример 1) и соединив их плавной линией, получим достаточно точный график искомой кривой (рис. 4.15). ◀

Параметрические уравнения линии. Уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \\ z &= f_3(t), \end{aligned}\right\} \qquad (4.17)$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ — некоторые функции параметра t, называются *параметрическими уравнениями линии в пространстве.* В частном случае, когда $f_3(t) \equiv 0$ (или $f_1(t) \equiv 0$, или $f_2(t) \equiv 0$), получаем параметрические уравнения линии на плоскости $z = 0$ (или $x = 0$, или $y = 0$). Следует отметить, что уравнения (4.17) задают не только линию, но и «закон движения» точки $M(x, y, z)$ по этой линии: каждому значению параметра t соответствует определенное положение точки на линии.

Пример 7. Выяснить, какая линия определяется параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= at\cos t, \\ y &= at\sin t, \quad a > 0, \ b > 0, \ t \geqslant 0. \\ z &= bt, \end{aligned}\right\}$$

▶ Это спиральная винтовая линия, проекция которой на плоскость $z = 0$ является спиралью Архимеда $\rho = a\varphi$ (рис. 4.16). ◀

Пример 8. Выяснить, какую линию задают указанные параметрические уравнения

$$\left.\begin{aligned} &x = a\sin^2 t, \quad a > 0, \\ &y = b\cos^2 t, \quad b > 0, \quad -\infty < t < \infty. \\ &z = 0, \end{aligned}\right\}$$

▶ Это отрезок прямой, концы которого лежат на осях координат в точках $A(a,\ 0)$ и $B(0,\ b)$. При изменении t в интервале $(-\infty;\ +\infty)$ точка $M(t)$ отрезка AB бесчисленное множество раз «пробегает» этот отрезок (рис. 4.17). ◀

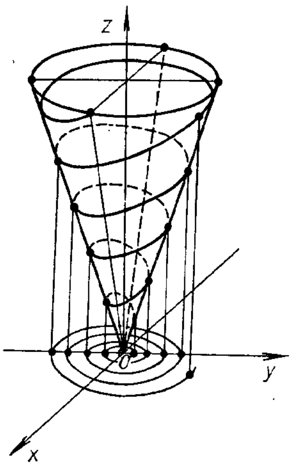


Рис. 4.16

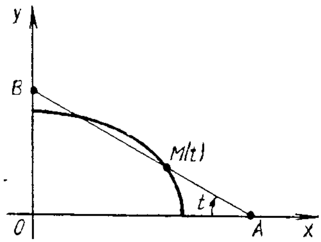


Рис. 4.17

Если из параметрических уравнений (4.17) удается исключить параметр t, получают уравнения линии в декартовых координатах. Для пространственной линии имеем пару уравнений, каждое из которых определяет цилиндрическую поверхность, а их пересечение дает саму линию. Например, спиральную винтовую линию (см. пример 7) можно представить следующей парой уравнений цилиндрических поверхностей ($t = z/b$):

$$x = \frac{a}{b} z\cos\frac{z}{b}, \quad y = \frac{a}{b} z\sin\frac{z}{b}, \quad z \geqslant 0.$$

Для плоской линии, лежащей в некоторой координатной плоскости, исключение параметра t также приводит к паре уравнений в декартовых координатах, но одно из них всегда является уравнением координатной плоскости, в которой лежит сама линия. Уравнение координатной плоскости часто опускают. Так, в примере 8 уравнение отрезка AB можно представить следующей парой уравнений в декартовых координатах:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad z = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b.$$

Пример 9. Построить линию, заданную параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= t - 1/t + 2, \\ z &= t + 1/t - 3. \end{aligned}\right\}$$

▶ Данная линия лежит в координатной плоскости Oyz. Придавая различные значения параметру t, можно получить достаточное количество точек линии, по которым она строится. Чтобы более точно изучить эту линию, воспользуемся методом исключения параметра. Перенесем числа 2 и -3 во втором и третьем уравнениях системы в левую часть. Возведем обе части уравнений в квадрат и из $(z+3)^2$ вычтем $(y-2)^2$. Тогда:

$$(z+3)^2 - (y-2)^2 = (t + 1/t)^2 - (t - 1/t)^2 = 4,$$

$$\frac{(z+3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$

Следовательно, в координатной плоскости $x = 0$ имеем равнобочную гиперболу ($a = b = 2$) с центром в точке $C(0, 2, -3)$, изображенную на рис. 4.18. ◀

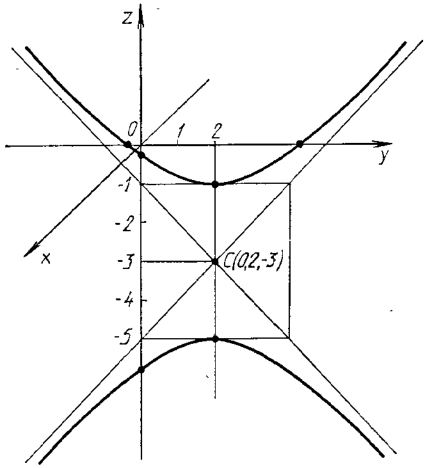


Рис. 4.18

АЗ-4.3

1. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах. Записать их в декартовых координатах:

1) $\rho = 5$; 2) $\varphi = \pi/3$;

3) $\rho = a\varphi$ (*спираль Архимеда*);

4) $\rho = 6\cos\varphi$; 5) $\rho = 10\sin\varphi$;

6) $\rho\cos\varphi = 2$; 7) $\rho\sin\varphi = 1$;

8) $\rho = \frac{4}{1-\cos\varphi}$ (*парабола*);

9) $\rho = a(1-\cos\varphi)$ (*кардиоида*);

10) $\rho = 3/\varphi$ (*гиперболическая спираль*);

11) $\rho = 2^{\varphi}$, $\rho = (1/2)^{\varphi}$ (*логарифмические спирали*);

12) $\rho = a\sin 3\varphi$ (*трехлепестковая роза*);

13) $\rho = a\sin^2 2\varphi$ (*четырехлепестковая роза*);

14) $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ (*лемниската Бернулли*).

2. Составить в полярных координатах уравнения следующих линий:

а) прямой, перпендикулярной к полярной оси и отсекающей на ней отрезок, равный 3;

б) прямых, параллельных полярной оси и отстоящих от нее на расстоянии 5;

в) окружности радиусом $R=4$ с центром на полярной оси и проходящей через полюс;

г) окружностей радиусом $R=3$, касающихся полярной оси в полюсе.

(*Ответ*: а) $\rho\cos\varphi = 3$; б) $\rho\sin\varphi = \pm 5$; в) $\rho = 8\cos\varphi$; г) $\rho = \pm 6\sin\varphi$.)

3. Построить следующие линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $x = 3t-1$, $y = -2t+5$;

2) $x = 3\cos t + 3$, $y = 3\sin t - 2$;

3) $x = 5 + 4\cos t$, $y = -1 + \sin t$;

4) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ (*циклоида*);

5) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (*астроида*);

6) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ (*винтовая линия*);

7) $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$, $y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$.

Самостоятельная работа

1. Исключив параметр t из данных параметрических уравнений линий на плоскости, записать их уравнения в декартовых координатах $F(x, y) = 0$, определить тип каждой линии и ее расположение на плоскости:

1) $x = a/\cos t$, $y = b\operatorname{tg} t$ (гипербола);

2) $x = 2a\cos^2 t$, $y = a\sin 2t$ (окружность);

3) $x = a\sin 2t$, $y = 2a\sin^2 t$ (окружность);

4) $x = -2 + 3\sin 2t$, $y = 1 + \cos 2t$ (эллипс);

5) $x = 4(1-t)$, $y = 2\sqrt{t}$ (часть параболы, для которой $y \geqslant 0$).

2. Построить линии, записав их уравнения в полярных координатах:

1) $x^2+y^2=5(\sqrt{x^2+y^2}-x)$;
2) $x^4-y^4=(x^2+y^2)^3$; 3) $(x^2+y^2)^2=y^2$;
4) $3x^2-y^2=(x^2+y^2)^{3/2}$; 5) $(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$.

4.4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 4

ИДЗ-4.1

1. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B — точки, лежащие на кривой, F — фокус, a — большая (действительная) полуось, b — малая (мнимая) полуось, ε — эксцентриситет, $y=\pm kx$ — уравнения асимптот гиперболы, D — директриса кривой, $2c$ — фокусное расстояние).

1.1. а) $b=15$, $F(-10,\ 0)$; б) $a=13$, $\varepsilon=14/13$; в) D: $x=-4$.

1.2. а) $b=2$, $F(4\sqrt{2},\ 0)$; б) $a=7$, $\varepsilon=\sqrt{85}/7$; в) D: $x=5$.

1.3. а) $A(3,\ 0)$, $B(2,\ \sqrt{5}/3)$; б) $k=3/4$, $\varepsilon=5/4$; в) D: $y=-2$.

1.4. а) $\varepsilon=\sqrt{21}/5$, $A(-5,\ 0)$; б) $A(\sqrt{80},\ 3)$, $B(4\sqrt{6},\ 3\sqrt{2})$; в) D: $y=1$.

1.5. а) $2a=22$, $\varepsilon=\sqrt{57}/11$; б) $k=2/3$, $2c=10\sqrt{13}$; в) ось симметрии Ox и $A(27,\ 9)$.

1.6. а) $b=\sqrt{15}$, $\varepsilon=\sqrt{10}/25$; б) $k=3/4$, $2a=16$; в) ось симметрии Ox и $A(4,\ -8)$.

1.7. а) $a=4$, $F=(3,\ 0)$; б) $b=2\sqrt{10}$, $F(-11,\ 0)$; в) D: $x=-2$.

1.8. а) $b=4$, $F=(9,\ 0)$; б) $a=5$, $\varepsilon=7/5$; в) D: $x=6$.

1.9. а) $A(0,\ \sqrt{3})$, $B(\sqrt{14/3},\ 1)$; б) $k=\sqrt{21}/10$, $\varepsilon=11/10$; в) D: $y=-4$.

1.10. а) $\varepsilon=7/8$, $A(8, 0)$; б) $A(3,\ -\sqrt{3/5})$, $B(\sqrt{13/5}, 6)$; в) D: $y=4$.

1.11. а) $2a=24$, $\varepsilon=\sqrt{22}/6$; б) $k=\sqrt{2/3}$, $2c=10$; в) ось симметрии Ox и $A(-7,\ -7)$.

1.12. а) $b=2$, $\varepsilon=5\sqrt{29}/29$; б) $k=12/13$, $2a=26$; в) ось симметрии Ox и $A(-5,\ 15)$.

1.13. а) $a=6$, $F(-4, 0)$; б) $b=3$, $F(7, 0)$; в) D: $x=-7$.

1.14. а) $b=7$, $F(5, 0)$; б) $a=11$, $\varepsilon=12/11$; в) D: $x=10$.

1.15. а) $A(-\sqrt{17/3}, 1/3)$, $B(\sqrt{21}/2, 1/2)$; б) $k=1/2$, $\varepsilon=\sqrt{5}/2$; в) D: $y=-1$.

1.16. а) $\varepsilon=3/5$, $A(0, 8)$; б) $A(\sqrt{6}, 0)$, $B(-2\sqrt{2}, 1)$; в) D: $y=9$.

1.17. а) $2a=22$, $\varepsilon=10/11$; б) $k=\sqrt{11}/5$, $2c=12$; в) ось симметрии Ox и $A(-7, 5)$.

1.18. а) $b=5$, $\varepsilon=12/13$; б) $k=1/3$, $2a=6$; в) ось симметрии Oy и $A(-9, 6)$.

1.19. а) $a=9$, $F(7, 0)$; б) $b=6$, $F(12, 0)$; в) D: $x=-1/4$.

1.20. а) $b=5$, $F(-10, 0)$; б) $a=9$, $\varepsilon=4/3$; в) D: $x=12$.

1.21. а) $A(0, -2)$, $B(\sqrt{15}/2, 1)$; б) $k=2\sqrt{10}/9$, $\varepsilon=11/9$; в) D: $y=5$.

1.22. а) $\varepsilon=2/3$, $A(-6, 0)$; б) $A(\sqrt{8}, 0)$, $B(\sqrt{20}/3, 2)$; в) D: $y=1$.

1.23. а) $2a=50$, $\varepsilon=3/5$; б) $k=\sqrt{29}/14$, $2c=30$; в) ось симметрии Oy и $A(4, 1)$.

1.24. а) $b=2\sqrt{15}$, $\varepsilon=7/8$; б) $k=5/6$, $2a=12$; в) ось симметрии Oy и $A(-2, 3\sqrt{2})$.

1.25. а) $a=13$, $F(-5, 0)$; б) $b=44$, $F(-7, 0)$; в) D: $x=-3/8$.

1.26. а) $b=7$, $F(13, 0)$; б) $b=4$, $F(-11, 0)$; в) D: $x=13$.

1.27. а) $A(-3, 0)$, $B(1, \sqrt{40}/3)$; б) $k=\sqrt{2/3}$, $\varepsilon=\sqrt{15}/3$; в) D: $y=4$.

1.28. а) $\varepsilon=5/6$, $A(0, -\sqrt{11})$; б) $A(\sqrt{32/3}, 1)$, $B(\sqrt{8}, 0)$; в) D; $y=-3$.

1.29. а) $2a=30$, $\varepsilon=17/15$; б) $k=\sqrt{17}/8$, $2c=18$; в) ось симметрии Oy и $A(4, -10)$.

1.30. а) $b=2\sqrt{2}$, $\varepsilon=7/9$; б) $k=\sqrt{2}/2$, $2a=12$; в) ось симметрии Oy и $A(-45, 15)$.

2. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке A.

2.1. Вершины гиперболы $12x^2-13y^2=156$, $A(0,\ -2)$.

2.2. Вершины гиперболы $4x^2-9y^2=36$, $A(0,\ 4)$.

2.3. Фокусы гиперболы $24y^2-25x^2=600$, $A(0,\ -8)$.

2.4. $O(0,\ 0)$, A — вершина параболы $y^2=3(x-4)$.

2.5. Фокусы эллипса $9x^2+25y^2=1$, $A(0,\ 6)$.

2.6. Левый фокус гиперболы $3x^2-4y^2=12$, $A(0,\ -3)$.

2.7. Фокусы эллипса $3x^2+4y^2=12$, A — его верхняя вершииа.

2.8. Вершину гиперболы $x^2-16y^2=64$, $A(0,\ -2)$.

2.9. Фокусы гиперболы $4x^2-5y^2=80$, $A(0,\ -4)$.

2.10. $O(0,\ 0)$, A — вершина параболы $y^2=-(x+5)/2$.

2.11. Правый фокус эллипса $33x^2+49y^2=1617$, $A(1,\ 7)$.

2.12. Левый фокус гиперболы $3x^2-5y^2=30$, $A(0,\ 6)$.

2.13. Фокусы эллипса $16x^2+41y^2=656$, A — его нижняя вершина.

2.14. Вершину гиперболы $2x^2-9y^2=18$, $A(0,\ 4)$.

2.15. Фокусы гиперболы $5x^2-11y^2=55$, $A(0,\ 5)$.

2.16. $B(1,\ 4)$, A — вершина параболы $y^2=(x-4)/3$.

2.17. Левый фокус эллипса $3x^2+7y^2=21$, $A(-1,\ -3)$.

2.18. Левую вершину гиперболы $5x^2-9y^2=45$, $A(0,\ -6)$.

2.19. Фокусы эллипса $24x^2-25y^2=600$, A — его верхняя вершина.

2.20. Правую вершину гиперболы $3x^2-16y^2-48$, $A(1,\ 3)$.

2.21. Левый фокус гиперболы $7x^2-9y^2=63$, $A(-1,\ -2)$.

2.22. $B(2,\ -5)$, A — вершина параболы $x^2=-2(y+1)$.

2.23. Правый фокус эллипса $x^2+4y^2=12$, $A(2,\ -7)$.

2.24. Правую вершину гиперболы $40x^2-81y^2=3240$, $A(-2,\ 5)$.

2.25. Фокусы эллипса $x^2+10y^2=90$, A — его нижняя вершина.

2.26. Правую вершину гиперболы $3x^2-25y^2=75$, $A(-5,\ -2)$.

2.27. Фокусы гиперболы $4x^2-5y^2=20$, $A(0,\ -6)$.

2.28. $B(3,\ 4)$, A — вершина параболы $y^2=(x+7)/4$.

2.29. Левый фокус эллипса $13x^2+49y^2=837$, $A(1,\ 8)$.

2.30. Правый фокус гиперболы $57x^2-64y^2=3648$, $A(2,\ 8)$.

3. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет заданным условиям.

3.1. Отстоит от прямой $x = -6$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(1, 3)$.

3.2. Отстоит от прямой $x = -2$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(4, 0)$.

3.3. Отстоит от прямой $y = -2$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $A(5, 0)$.

3.4. Отношение расстояний от точки M до точек $A(2, 3)$ и $B(-1, 2)$ равно $3/4$.

3.5. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(4, 0)$ и $B(-2, 2)$ равна 28.

3.6. Отстоит от точки $A(1, 0)$ на расстоянии, в пять раз меньшем, чем от прямой $x = 8$.

3.7. Отстоит от точки $A(4, 1)$ на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки $B(-2, -1)$.

3.8. Отстоит от прямой $x = -5$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $A(6, 1)$.

3.9. Отстоит от прямой $y = 7$ на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки $A(4, -3)$.

3.10. Отношение расстояний от точки M до точек $A(-3, 5)$ и $B(4, 2)$ равно $1/3$.

3.11. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-5, -1)$ и $B(3, 2)$ равна 40,5.

3.12. Отстоит от точки $A(2, 1)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой $x = -5$.

3.13. Отстоит от точки $A(-3, 3)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $B(5, 1)$.

3.14. Отстоит от прямой $x = 8$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(-1, 7)$.

3.15. Отстоит от прямой $x = 9$ на расстоянии, в четыре раза меньшем, чем от точки $A(-1, 2)$.

3.16. Отношение расстояний от точки M до точек $A(2, -4)$ и $B(3, 5)$ равно $2/3$.

3.17. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-3, 3)$ и $B(4, 1)$ равна 31.

3.18. Отстоит от точки $A(0, -5)$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от прямой $x = 3$.

3.19. Отстоит от точки $A(4, -2)$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от точки $B(1, 6)$.

3.20. Отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии, в три раза меньшем, чем от точки $A(1, 4)$.

3.21. Отстоит от прямой $x = 14$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от точки $A(2, 3)$.

3.22. Отношение расстояний от точки M до точек $A(3, -2)$ и $B(4, 6)$ равно 3/5.

3.23. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-5, 3)$ и $B(2, -4)$ равна 65.

3.24. Отстоит от точки $A(3, -4)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой $x=5$.

3.25. Отстоит от точки $A(5, 7)$ на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки $B(-2, 1)$.

3.26. Отстоит от прямой $x=2$ на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки $A(4, -3)$.

3.27. Отстоит от прямой $x=-7$ на расстоянии, в три раза меньшем, чем от точки $A(3, 1)$.

3.28. Отношение расстояний от точки M до точек $A(3, -5)$ и $B(4, 1)$ равно 1/4.

3.29. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-1, 2)$ и $B(3, -1)$ равна 18,5.

3.30. Отстоит от точки $A(1, 5)$ на расстоянии, в четыре раза меньшем, чем от прямой $x=-1$.

4. Построить кривую, заданную уравнением в полярной системе координат.

4.1. $\rho=2\sin 4\varphi$.	**4.2.** $\rho=2(1-\sin 2\varphi)$.
4.3. $\rho=2\sin 2\varphi$.	**4.4.** $\rho=3\sin 6\varphi$.
4.5. $\rho=2/(1+\cos\varphi)$.	**4.6.** $\rho=3(1+\sin\varphi)$.
4.7. $\rho=2(1-\cos\varphi)$.	**4.8.** $\rho=3(1-\cos 2\varphi)$.
4.9. $\rho=4\sin 3\varphi$.	**4.10.** $\rho=4\sin 4\varphi$.
4.11. $\rho=3(\cos\varphi+1)$.	**4.12.** $\rho=1/(2-\sin\varphi)$.
4.13. $\rho=5(1-\sin 2\varphi)$.	**4.14.** $\rho=3(2-\cos 2\varphi)$.
4.15. $\rho=6\sin 4\varphi$.	**4.16.** $\rho=2\cos 6\varphi$.
4.17. $\rho=3/(1-\cos 2\varphi)$.	**4.18.** $\rho=2(1-\cos 3\varphi)$.
4.19. $\rho=3(1-\cos 4\varphi)$.	**4.20.** $\rho=5(2-\sin\varphi)$.
4.21. $\rho=3\sin 4\varphi$.	**4.22.** $\rho=2\cos 4\varphi$.
4.23. $\rho=4(1+\cos 2\varphi)$.	**4.24.** $\rho=1/(2-\cos 2\varphi)$.
4.25. $\rho=4(1-\sin\varphi)$.	**4.26.** $\rho=3(1+\cos 2\varphi)$.
4.27. $\rho=3\cos 2\varphi$.	**4.28.** $\rho=2\sin 3\varphi$.
4.29. $\rho=2/(2-\cos\varphi)$.	**4.30.** $\rho=2-\cos 2\varphi$.

5. Построить кривую, заданную параметрическими уравнениями ($0\leqslant t\leqslant 2\pi$).

5.1. $\begin{cases} x=4\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t. \end{cases}$	**5.2.** $\begin{cases} x=2\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t. \end{cases}$
5.3. $\begin{cases} x=4\cos 2t, \\ y=3\sin 2t. \end{cases}$	**5.4.** $\begin{cases} x=2\sin t, \\ y=3(1-\cos t). \end{cases}$
5.5. $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=5\sin t. \end{cases}$	**5.6.** $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t. \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 3\sin 2t. \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 1 - \sin t. \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} x = 3\cos 2t, \\ y = 2\sin 2t. \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2(1 - \sin t). \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} x = 4\cos 2t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t. \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} x = 4\cos 3t, \\ y = 2\sin 3t. \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3(2 - \sin t). \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} x = 3\cos 2t, \\ y = 3\sin 2t. \end{cases}$

5.26. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

5.27. $\begin{cases} x = 5\cos 3t, \\ y = \sin 3t. \end{cases}$

5.28. $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4(1 - \sin t). \end{cases}$

5.29. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$

5.30. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t. \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$

Решение типового варианта

1. Составить канонические уравнения: а) эллипса, большая полуось которого равна 3, а фокус находится в точке $F(\sqrt{5}, 0)$; б) гиперболы с мнимой полуосью, равной 2, и фокусом $F(-\sqrt{13}, 0)$; в) параболы, имеющей директрису $x = -3$.

▶ а) Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. По условию задачи большая полуось $a = 3$, $c = \sqrt{5}$. Для эллипса выполняется равенство $b^2 = a^2 - c^2$. Подставив в него значения a и c, найдем $b^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4$. Искомое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1;$$

б) Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. По условию мнимая полуось $b = 2$, а $c = \sqrt{13}$. Для гиперболы справедливо равенство $b^2 = c^2 - a^2$. Поэтому $a^2 = c^2 - b^2 = (\sqrt{13})^2 - 2^2 = 9$. Записываем искомое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1;$$

в) Каноническое уравнение параболы в данном случае должно иметь вид $y^2 = 2px$, а уравнение ее директрисы $x = -p/2$. Но по условию задачи уравнение директрисы $x = -3$. Поэтому $-p/2 = -3$, $p = 6$ и искомое каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 12x. \blacktriangleleft$$

2. Записать уравнение окружности, проходящей через фокусы эллипса $x^2 + 4y^2 = 4$ и имеющей центр в его верхней вершине.

▶ Для данного эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ верхняя вершина $A(0,\ 1)$, $a = 2$, $b = 1$. Поэтому

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

и фокусы находятся в точках $F_1(-\sqrt{3},\ 0)$, $F_2(\sqrt{3},\ 0)$. Радиус R искомой окружности вычисляем по формуле расстояния между двумя точками:

$$R = |AF_1| = |AF_2| = \sqrt{(\mp\sqrt{3} - 0)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2.$$

В соответствии с уравнением (4.2) записываем искомое уравнение окружности:

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 2^2 \text{ или } x^2 + (y - 1)^2 = 4. \blacktriangleleft$$

3. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от точки $A(3,\ 2)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $B(-1,\ 0)$.

▶ Пусть $M(x,\ y)$ — любая точка искомой линии (рис. 4.19). Тогда по условию задачи $|AM| = 3|BM|$. Так как

$$|AM| = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2}, \quad |BM| = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2},$$

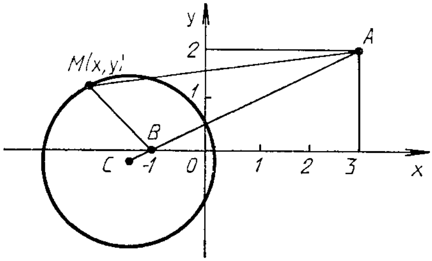


Рис. 4.19

то уравнение искомой линии

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=3\sqrt{(x+1)^2+y^2}.$$

Преобразуем его, возведя обе части в квадрат. Имеем:

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4=9x^2+18x+9+9y^2,$$
$$8x^2+24x+8y^2+4y-4=0.$$

Выделив полные квадраты в последнем уравнении, придем к уравнению вида

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{45}{16},$$

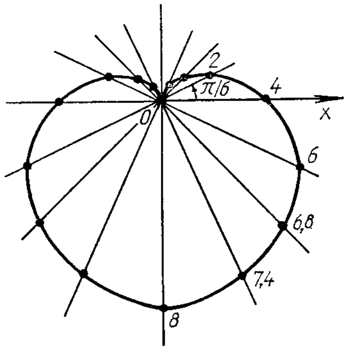
которое является уравнением окружности с центром в точке $C(-3/2, -1/4)$ и радиусом $R=3\sqrt{5}/4$. ◀

4. Построить кардиоиду, заданную уравнением в полярных координатах $\rho=4(1-\sin\varphi)$.

▶ Составим таблицу, в которой приведены значения полярного угла φ_i ($i=\overline{1,16}$) и соответствующие им значения полярного радиуса ρ_i:

φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i
0	4	$\pi/2$	0	π	4	$3\pi/2$	8
$\pi/6$	2	$2\pi/3$	$\approx 0,6$	$7\pi/6$	6	$5\pi/3$	$\approx 7,4$
$\pi/4$	$\approx 1,2$	$3\pi/4$	$\approx 1,2$	$5\pi/4$	$\approx 6,8$	$7\pi/4$	$\approx 6,8$
$\pi/3$	$\approx 0,6$	$5\pi/6$	2	$4\pi/3$	$\approx 7,4$	$11\pi/6$	6

Построив найденные точки $M_i(\rho_i, \varphi_i)$ в полярной системе координат (см. пример 1 из § 4.3) и соединив их плавной линией, получим достаточно точное представление о кардиоиде (рис. 4.20.). ◀



Р и с. 4.20

5. Построить кривую, заданную параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 3\cos t, \\ y = 2 - 2\sin t, \end{array} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.\right\}$$

▶ Выберем достаточное количество значений параметра t_i, вычислим соответствующие значения x_i, y_i и построим точки $M_i(x_i, y_i)$ в декартовых координатах. Соединим их плавной линией. Очевидно, что полученная кривая очень похожа на эллипс с полуосями $a = 3$, $b = 2$ и центром в точке $C(1, 2)$. Для строгого доказательства того, что данные параметрические уравнения определяют эллипс с указанными осями и центром, избавимся от параметра t:

$$\frac{x-1}{3} = \cos t, \quad \frac{y-2}{-2} = \sin t,$$

откуда $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$. ◀

ИДЗ-4.2

1. Построить поверхности и определить их вид (название).

1.1. а) $4x^2 - y^2 - 16z^2 + 16 = 0$; б) $x^2 + 4z = 0$.
1.2. а) $3x^2 + y^2 + 9z^2 - 9 = 0$; б) $x^2 + 2y^2 - 2z = 0$.
1.3. а) $-5x^2 + 10y^2 - z^2 + 20 = 0$; б) $y^2 + 4z^2 = 5x^2$.
1.4. а) $4x^2 - 8y^2 + z^2 + 24 = 0$; б) $x^2 - y = -9z^2$.
1.5. а) $x^2 - 6y^2 + z^2 = 0$; б) $7x^2 - 3y^2 - z^2 = 21$.
1.6. а) $z = 8 - x^2 - 4y^2$; б) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 72$.
1.7. а) $4x^2 + 6y^2 - 24z^2 = 96$; б) $y^2 + 8z^2 = = 20x^2$
1.8. а) $4x^2 - 5y^2 - 5z^2 + 40 = 0$; б) $y = 5x^2 + 3z^2$.

1.9. а) $x^2=8(y^2+z^2)$; б) $2x^2+3y^2-z^2=18$.
1.10. а) $5z^2+2y^2=10x$; б) $4z^2-3y^2-5x^2+60=0$.
1.11. а) $x^2-7y^2-14z^2-21=0$; б) $2y=x^2+4z^2$.
1.12. а) $6x^2-y^2+3z^2-12=0$; б) $8y^2+2z^2=x$.
1.13. а) $-16x^2+y^2+4z^2-32=0$; б) $6x^2+y^2-3z^2=0$.
1.14. а) $5x^2-y^2-15z^2+15=0$; б) $x^2+3z=0$.
1.15. а) $6x^2+y^2+6z^2-18=0$; б) $3x^2+y^2-3z=0$.
1.16. а) $-7x^2+14y^2-z^2+21=0$; б) $y^2+2z^2=6x^2$.
1.17. а) $-3x^2+6y^2-z^2-18=0$; б) $x^2-2y=-z^2$.
1.18. а) $4x^2-6y^2+3z^2=0$; б) $4x^2-y^2-3z^2=12$.
1.19. а) $z=4-x^2-y^2$; б) $3x^2+12y^2+4z^2=48$.
1.20. а) $4x^2+5y^2-10z^2=60$; б) $7y^2+z^2=14x^2$.
1.21. а) $9x^2-6y^2-6z^2+1=0$; б) $15y=10x^2+6y^2$.
1.22. а) $x^2=5(y^2+z^2)$; б) $2x^2+3y^2-z^2=36$.
1.23. а) $4x^2+3y^2=12x$; б) $3x^2-4y^2-2z^2+12=0$.
1.24. а) $8x^2-y^2-2z^2-32=0$; б) $y-4z^2=3x^2$.
1.25. а) $x^2-6y^2+z^2-12=0$; б) $x-3z^2=9y^2$.
1.26. а) $2x^2-3y^2-5z^2+30=0$; б) $2x^2+3z=0$.
1.27. а) $7x^2+2y^2+6z^2-42=0$; б) $2x^2+4y^2-5z=0$.
1.28. а) $-4x^2+12y^2-3z^2+24=0$; б) $2y^2+6z^2=3x$.
1.29. а) $3x^2-9y^2+z^2+27=0$; б) $z^2-2y=-4x^2$.
1.30. а) $27x^2-63y^2+21z^2=0$; б) $3x^2-7y^2-2z^2=42$.

2. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок.

2.1. а) $y^2=2z$, Oz; б) $9y^2+4z^2=36$; Oy.
2.2. а) $4x^2-3y^2=12$, Ox; б) $x=1$, $y=2$, Oz.
2.3. а) $x^2=-3z$, Oz; б) $3x^2+5z^2=15$, Ox.
2.4. а) $3y^2-4z^2=12$, Oz; б) $y=4$, $z=2$, Ox.
2.5. а) $x^2=3y$, Oy; б) $3x^2+4z^2=24$, Oz.
2.6. а) $2x^2-6y^2=12$, Ox; б) $y^2=4z$, Oz.
2.7. а) $x^2+3z^2=9$, Oz; б) $x=4$, $z=6$, Oy.
2.8. а) $3x^2-5z^2=15$, Oz; б) $z=-1$, $y=3$, Ox.
2.9. а) $y^2=3z$, Oz; б) $2x^2+3z^2=6$, Ox.
2.10. а) $y^2-5x^2=5$, Oy; б) $y=3$, $z=1$, Ox.
2.11. а) $x^2=-4z$, Oz; б) $y^2+4z^2=4$, Oy.
2.12. а) $5x^2-6z^2=30$, Ox; б) $x=3$, $z=-2$, Oy.
2.13. а) $z^2=2y$, Oy; б) $2x^2+3z^2=6$, Oz.
2.14. а) $y^2=-4z$, Oz; б) $3y^2+z^2=6$, Oy.
2.15. а) $7x^2-5y^2=35$, Ox; б) $x=-1$, $y=-3$, Oz.
2.16. а) $2x^2=z$, Oz; б) $x^2+4z^2=4$, Ox.
2.17. а) $2y^2-5z=10$, Oz; б) $y=2$, $z=6$, Ox.
2.18. а) $x^2=-5y$, Oy; б) $2x^2+3z=6$, Oz.
2.19. а) $x^2-9y^2=9$, Ox; б) $3y^2=z$, Oz.

2.20. а) $x^2+2z=4$, Oz; б) $x=3$, $z=-1$, Oy.
2.21. а) $15x^2-3y^2=1$, Ox; б) $x=3$, $y=4$, Oz.
2.22. а) $y^2=5z$, Oz; б) $3x^2+7y^2=21$, Ox.
2.23. а) $15y^2-x^2=6$, Oy; б) $y=5$, $z=2$, Oy.
2.24. а) $5z=-x^2$, Oz; б) $3y^2+18z^2=1$, Oy.
2.25. а) $3x^2-8y^2=288$, Ox; б) $x=5$, $z=-3$, Oy.
2.26. а) $2y^2=72$, Oz; б) $6y^2+5z^2=30$, Oy.
2.27. а) $5x^2-7y^2=35$, Ox; б) $x=2$, $y=-4$, Oz.
2.28. а) $3x^2=-2z$, Oz; б) $8x^2+11z^2=88$, Ox.
2.29. а) $5y^2-8z^2=40$, Oz; б) $y=3$, $z=1$, Ox.
2.30. а) $3x^2=-4y$, Oz; б) $4x^2+3z^2=12$, Oz.

3. Построить тело, ограниченное указанными поверхностями.

3.1. а) $z=x^2+y^2$, $z=0$, $x=1$, $y=2$, $x=0$, $y=0$; б) $x^2+y^2=2x$, $z=0$, $z=x$.

3.2. а) $x^2+y^2=z^2, z=0, y=2x, y=4x, x=3$ $(z>0)$; б) $x^2+y^2=4y$, $z=0$, $y+z=5$.

3.3. а) $y^2+3z^2=6$, $3x^2-25y^2=75$, $z\geqslant 0$; б) $x=4$, $y=2$, $x+2y+3z=12$, $x=0$, $y=0$, $z\geqslant 0$.

3.4. а) $z=5y$, $x^2+y^2=16$, $z=0$; б) $x+y+z=5$, $3x+y=5$, $2x+y=5$, $y=0$, $z=0$.

3.5. а) $y=3x$, $y=0$, $x=2$, $z=xy$, $z=0$; б) $8(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

3.6. а) $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=x^2+5y^2$, $z=0$; б) $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+y^2\leqslant 1$, $x\geqslant 0$.

3.7. а) $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$; б) $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=z^2$, $x\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

3.8. а) $y=2x$, $y=0$, $x=2$, $z=xy$, $z=0$; б) $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

3.9. а) $z=x^2+3y^2$, $z=0$, $y=x$, $y=0$, $x=1$; б) $z=8(x^2+y^2)+3$, $z=16x+3$.

3.10. а) $y=4x$, $y=0$, $x=1$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$; б) $z=3\sqrt{x^2+y^2}$, $z=2-x^2-y^2$.

3.11. а) $y=x, y=0, x=1, z=3x^2+2y^2, z=0$; б) $z=10(x^2+y^2)+1$, $z=1-20y$.

3.12. а) $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$; б) $y=16\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{2x}$, $z=0$, $x+z=2$.

3.13. а) $y=x$, $y=0$, $x=2$, $z=0$; б) $x+y=2$, $x=\sqrt{y}$, $z=2x$, $z=0$.

3.14. а) $2z=x^2+y^2$, $z=0$, $x=2$, $y=3$, $x=0$, $y=0$; б) $x^2+y^2=4x$, $z=0$, $z=x$.

3.15. а) $x^2+y^2=4z^2$, $z=0$, $y=x$, $y=8x$, $x=2$, $z>0$; б) $x^2+y^2=8y$, $z=0$, $y+z=6$.

3.16. а) $y^2+4z^2=8$, $16x^2-49y^2=784$, $z\geqslant 0$; б) $x=1$, $y=3$, $x+5y+10z=20$, $x=0$, $y=0$, $z\geqslant 0$.

3.17. а) $z=3y^2$, $x^2+y^2=4$, $z=0$; б) $x+2y+3z=6$, $2x=y$, $2x+3y=6$, $y=0$, $z=0$.

3.18. а) $y=4x$, $y=0$, $x=1$, $z=xy$, $z=0$; б) $4(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=4$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

3.19. а) $y=2x$, $y=0$, $x=2$, $z=2x^2+y^2$, $z=0$; б) $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2\leqslant 4$, $x\geqslant 0$.

3.20. а) $y=4x$, $y=0$, $x=4$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$; б) $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+z^2=y^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

3.21. а) $y=3x$, $y=0$, $x=3$, $z=xy$, $z=0$; б) $4(x^2+y^2)=z^2$, $4(x^2+y^2)=1$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

3.22. а) $z=16x^2+y^2$, $z=0$, $y=2x$, $y=0$, $x=1$; б) $z-4=6(x^2+y^2)$, $z=4x+1$.

3.23. а) $y=3x$, $y=0$, $x=3$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$; б) $z=4\sqrt{x^2+y^2}$, $z=5-x^2-y^2$.

3.24. а) $y=3x$, $y=0$, $x=2$, $z=x^2+y^2$, $z=0$; б) $z-2=6(x^2+y^2)$, $z=1-4y$.

3.25. а) $y=2x$, $y=0$, $x=4$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$; б) $x+y=2$, $y=\sqrt{x}$, $z=12y$, $z=0$, $x=0$.

3.26. а) $z=2x^2+3y^2$, $z=0$, $x=2$, $y=1$, $x=0$, $y=0$; б) $x^2+y^2=6x$, $z=0$, $z=2x$.

3.27. а) $4(x^2+y^2)=z^2$, $z=0$, $y=x$, $y=4x$, $x=2(z>0)$; б) $x^2+y^2=4y$, $z=0$, $y+z=6$.

3.28. а) $2y^2+z^2=4$, $3x^2-8y^2=48$, $z\geqslant 0$; б) $x=1$, $y=3$, $x+2y+4z=24$, $x=0$, $y=0$, $z\geqslant 0$.

3.29. а) $z=3y^2$, $x^2+y^2=9$, $z=0$; б) $x+y+z=8$, $x+2y=4$, $x+4y=4$, $y=0$, $z=0$.

3.30. а) $y=5x$, $y=0$, $x=3$, $z=0$; б) $4(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=4$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

Решение типового варианта

1. Построить данные поверхности и определить их вид (название):

а) $-\frac{x^2}{6}+4y^2+\frac{1}{2}z^2-2=0$; б) $3x^2+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=0$.

▶ а) Приведем уравнение к каноническому виду

$$-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{1/2}+\frac{z^2}{4}=1.$$

Получили уравнение гиперболоида, расположенного так, как показано на рис. 4.21; полуоси его «горлового» эллипса $OB=\sqrt{2}/2$, $OC=2$;

б) Приведем уравнение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{12}=0.$$

Это уравнение конуса второго порядка, ориентированного указанным на рис. 4.22 образом. Его сечения плоскостями $z=\text{const}$ являются эллипсами. ◀

2. Записать уравнение поверхности, полученной при вращении:

1) параболы $z=-\frac{1}{2}y^2$: а) вокруг оси Oy; б) вокруг оси Oz;

2) эллипса $\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$: а) вокруг оси Oz; б) вокруг оси Oy.

▶ 1. В соответствии с общим правилом получения уравнения поверхности вращения (см. § 4.2) находим:

а) $\pm\sqrt{x^2+z^2}=-\frac{1}{2}y^2$, $4x^2-y^4+4z^2=0$

(алгебраическая поверхность четвертого порядка (рис. 4.23));

б) $z=-\frac{1}{2}(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2$, $z=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

(параболоид вращения (рис. 4.24)).

2. Имеем:

а) $\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$, $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1.$

Получили сплюснутый вдоль оси Oz эллипсоид вращения (сфероид), полуоси его главных сечений $OA=OB=8$, $OC=2$ (рис. 4.25);

б) $\frac{y^2}{64}+\frac{(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2}{4}=1$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$

(вытянутый вдоль оси Oy эллипсоид вращения (рис. 4.26): $OA=OC=2$, $OB=8$). ◀

3. Построить тело, ограниченное данными поверхностями:

а) $y=x$, $x=1$, $z=0$, $z=xy$;

б) $x+y=4$, $x=\sqrt{2y}$, $3x=2z$, $z=0$.

▶ а) Построение выполнено на рис. 4.27: OC — дуга

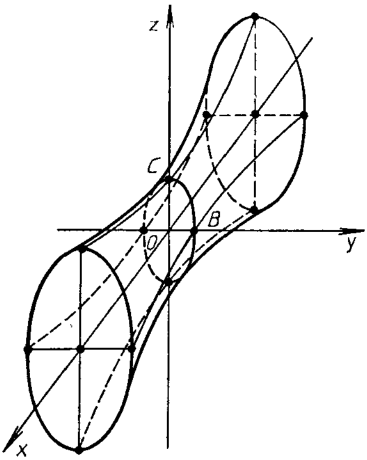


Рис. 4.21

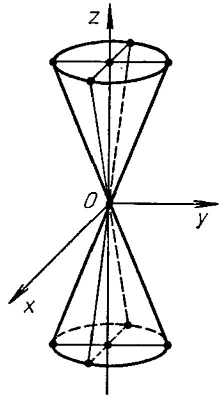


Рис. 4.22

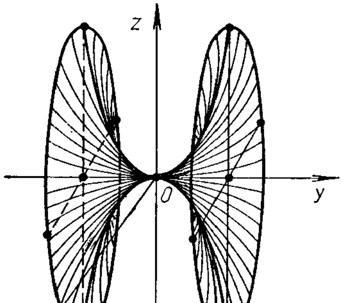


Рис. 4.23

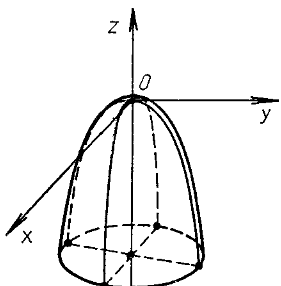


Рис. 4.24

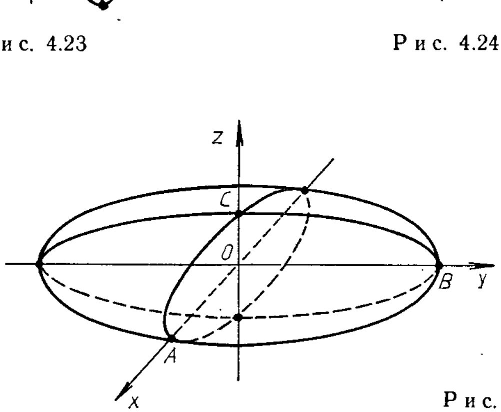
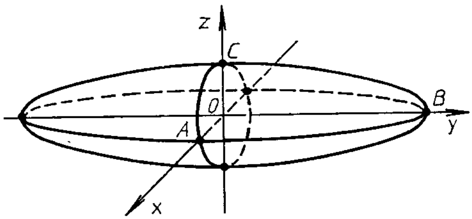
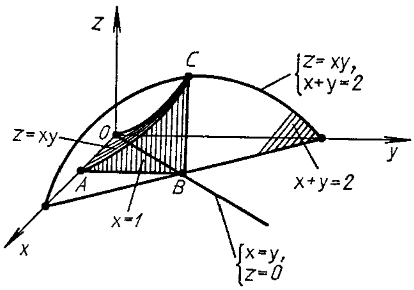


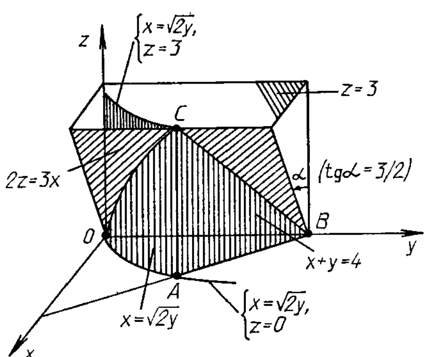
Рис. 4.25



Р и с. 4.26



Р и с. 4.27



Р и с. 4.28

параболы, являющейся пересечением гиперболического параболоида $z = xy$ с плоскостью $x = y$; $\smile{AC}$ — пересечение поверхности $z = xy$ с плоскостью $x = 1$; $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(1,\ 1,\ 0)$, $C(1,\ 1,\ 1)$ — характерные точки тела;

б) Построение выполнено на рис. 4.28: OC — дуга параболы, являющейся пересечением параболического цилиндра с плоскостью $2z=3x$; $A(2, 2, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(2, 2, 3)$ — характерные точки тела. ◀

4.5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 4

1. Через точку $A(7/2, 7/4)$ провести хорду эллипса $x^2+4y^2=25$, делящуюся в этой точке пополам. (*Ответ*: $x+2y-7=0$.)

2. Доказать, что парабола обладает так называемым оптическим свойством: луч света, выйдя из фокуса и отразившись от параболы, пойдет по прямой, параллельной оси параболы.

3. Через точку $A(4, 4)$ провести хорду гиперболы $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$, делящуюся в этой точке пополам. (*Ответ*: $4x-3y-4=0$.)

4. Найти радиус наибольшей окружности, лежащей внутри параболы $y^2=2px$ и касающейся этой параболы в ее вершине. (*Ответ*: $R=p$.)

5. Составить уравнение гиперболы с асимптотами $\sqrt{3}x\pm y=0$, касающейся прямой $2x-y-3=0$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1.\right)$

6. Составить уравнение касательной к параболе $y^2=-8x$, отрезок которой между точкой касания и директрисой делится осью Oy пополам. (*Ответ*: $x+y-2=0$ или $x-y-2=0$.)

7. Доказать, что все треугольники, образованные асимптотами гиперболы и произвольной касательной к ней, имеют одну и ту же площадь; выразить эту площадь через полуоси гиперболы. (*Ответ*: ab.)

8. Составить уравнения касательных к параболе $y^2=16x$, проходящих через точку $A(1, 5)$, и вычислить площадь треугольника, образованного касательными и директрисой параболы. (*Ответ*: $x-y+4=0$, $4x-y+1=0$, $S=37{,}5$.)

9. Источник коротколнтервального звука находится в неизвестном пункте M. Звук достиг трех наблюдательных пунктов неодновременно: пункта A — на t_1 с позже, а пункта C — на t_2 с позже, чем пункта B. Определить местонахождение пункта M, приняв скорость звука равной 330 м/с. (*Ответ*: M находится на пересечении правой ветви гиперболы $|AM| - |BM| = 330t_1$ м с фокусами A и B и левой ветви гиперболы $|BM| - |CM| = -330t_2$ м с фокусами B и C.)

10. Цепь подвесного моста имеет форму параболы $y = px^2$. Длина пролета моста — 50 м, а прогиб цепи — 5 м. Определить величину угла α прогиба в крайней точке моста. (*Ответ*: $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}4$, $\alpha \approx 21°50'$.)

11. Зеркальная поверхность прожектора образована вращением параболы вокруг ее оси симметрии. Диаметр зеркала 80 см, а глубина его 20 см. На каком расстоянии от вершины параболы нужно поместить источник света, если для отражения лучей параллельным пучком он должен быть в фокусе параболы? (*Ответ*: 40 см.)

12. Даны точка O и прямая l, находящаяся от точки O на расстоянии $|OA| = a$. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий прямую l в переменной точке P. На этом луче от точки O откладывается отрезок OM так, что $|OP| \cdot |OM| = b^2$. Найти уравнение линии, которая описывается точкой M при вращении луча. Уравнение записать в полярных и декартовых координатах. $\Big($*Ответ*: окружность: $\rho = \frac{b^2}{a} \cos \varphi$, $x^2 + y^2 = \frac{b^2}{a} x$.$\Big)$

13. Записать параметрические уравнения линии пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и круглого цилиндра $x^2 + y^2 - 2x = 0$, выбирая в качестве параметра угол φ, образованный проекцией радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ произвольной точки M линии на плоскость Oxy с положительным направлением оси Ox. (*Ответ*: $x = R \cos^2 \varphi$, $y = R \sin \varphi \cos \varphi$, $z = R \sin \varphi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.)

14. Найти уравнение проекции линии пересечения поверхностей $x^2 + 2y^2 = 2z$ и $x + 2y + z = 1$ на плоскость Oxy. (*Ответ*: $x^2 + 2y^2 + 2x + 4y - 2 = 0$.)

15. Найти центр сечения гиперболоида $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = -4$ плоскостью $x + y + 2z = 2$. (*Ответ*: $(4, 2, -2)$.)

16. Найти уравнение плоскости, пересекающей эллипсоид $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9$ по эллипсу, центр которого находится в точке $C(3, 2, 1)$. (*Ответ*: $3x + 4y + 4z - 21 = 0$.)

17. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1, 1, 1)$ и $N(2, 0, 2)$ и пересекающей параболоид $x^2 - y^2 = 2z$ по паре прямых. (*Ответ*: $3x + y - 2z - 2 = 0$.)

18. Найти уравнение эллипсоида, содержащего точку $M(3, 1, 1)$ и окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - z = 0$, плоскости симметрии которого совпадают с плоскостями координат. (*Ответ*: $3x^2+4y^2+5z^2=36$.)

19. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0$, $2x+2y+z+1=0$. (*Ответ*: $(10/3,\ 14/3,\ 5/3)$, $R=3$.)

20. Доказать, что линия пересечения параболоида $x^2+2y^2=4z+10$ и сферы $x^2+y^2+z^2=6$ состоит из двух окружностей. Найти точки пересечения этих окружностей и их радиусы. (*Ответ*: $M_1(\sqrt{2},\ 0,\ -2)$, $M_2(-\sqrt{2},\ 0,\ -2)$, $R=2$.)

5. ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛЫ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

5.1. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Совокупность рациональных **Q** и иррациональных чисел образует множество действительных (вещественных) чисел **R**. Между множеством точек прямой и множеством **R** всегда можно установить взаимно однозначное соответствие. Если это соответствие установлено, то прямую называют *числовой осью*. Совокупность всех чисел x, удовлетворяющих условию $a < x < b$ ($a \leqslant x \leqslant b$), называется *интервалом (отрезком)* и обозначается $(a;\ b)$ ($[a;\ b]$).

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называют неотрицательное число $|a|$, определяемое условиями: $|a| = a$, если $a \geqslant 0$, и $|a| = -a$, если $a < 0$. Для любых действительных чисел a и b верно неравенство $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

Если каждому элементу $x \in \mathbf{D}$ по определенному правилу f поставлен в соответствие единственный элемент y, то говорят, что задана функция $y = f(x)$, где x называется *независимой переменной* или *аргументом*. Множество D называется *областью определения функции*, а множество значений, принимаемых функцией y, называется *областью ее значений (изменения)* и обозначается буквой E. В дальнейшем будем считать множества D и E числовыми, т. е. будем рассматривать числовые функции (если не оговорено противное). В качестве D и E могут быть взяты отрезок $[a;\ b]$, интервал $(a;\ b)$, полуинтервал $(a;\ b]$ или $[a;\ b)$, отдельные точки числовой оси, а также вся числовая ось $(-\infty;\ +\infty)$.

Основными способами задания функций являются: табличный, графический, аналитический. При аналитической записи функции $y = f(x)$ часто не указываются области D и E, но они естественным образом определяются из свойств функции $f(x)$.

Пример. Найти области определения и значений функции $y = \lg(4 - 3x - x^2)$.

▶ Логарифмическая функция определена, если $4 - 3x - x^2 > 0$. Корни квадратного трехчлена: $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. Записанное выше неравенство равносильно неравенству $-(x+4)(x-1) > 0$, что возможно при $x > -4$ и $x < 1$. Область D определения данной функции есть интервал $(-4;\ 1)$. Так как в D $0 < 4 - 3x - x^2 \leqslant 7/4$, то интервал $(-\infty;\ \lg(7/4))$ — область значений функции E. ◀

Если функция $y = f(x)$ осуществляет взаимно однозначное отображение области D на область E, то можно однозначно выразить x через y: $x = g(y)$. Последняя функция называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$. Для функции $x = g(y)$ E является областью определения, а D — областью значений. Так как $g(f(x)) \equiv x$ и $f(g(y)) \equiv y$, то функции $y = f(x)$ и $x = g(y)$ — взаимно обратные. Обратную функцию $x = g(y)$ обычно переписывают в стандартном виде: $y = g(x)$, поменяв x

и y местами. Взаимно обратнымн являются пары функций: $y=x^3$ и $y=\sqrt[3]{x}$, $y=2^x$ и $y=\log_2 x$, $y=\sin x$ н $y=\arcsin x$, для которых области определения соответственно следующие: $x\in(-\infty;\ +\infty)$ и $x\in(-\infty;\ +\infty)$, $x\in(-\infty;\ +\infty)$ и $x\in(0;\ +\infty)$, $x\in(-\infty;\ +\infty)$ и $x\in[-1;\ +1]$.

Если функция $u=\varphi(x)$ определена на области D, G — ее область значений, функция $y=f(u)$ определена на области G, то функция $y=f(\varphi(x))=F(x)$ называется *сложной функцией*, составленной из функций f н φ, или функцией f от функции φ. Функцию $y=f(\varphi(x))$ называют *композицией двух функций* $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$. Сложная функция может быть композицией большего числа функций: трех, четырех и т. д. Например, функция $y=\cos(x^2+1)$ — композиция двух функций $y=\cos u$ и $u=x^2+1$; функция $y=\lg(\sin 2^x)$ — композиция трех функций $y=\lg u$, $u=\sin v$, $v=2^x$, а функция $y=\lg(\sin 2^{x^3})$ — композиция четырех функций $y=\lg u$, $u=\sin v$, $v=2^w$, $w=x^3$. Переменные величины u, v, w называются *промежуточными аргументами*.

Функции внда $y=f(x)$ называются *явными*. Уравнение вида $F(x,\ y)=0$ также задает, вообще говоря, функциональную зависимость между x н y. В этом случае по определению y является *неявной функцией* x. Например, уравнение $y^3+x^3=8$ определяет y как неявную функцию от x.

Графиком функции $y=f(x)$ называется множество точек $M(x,\ y)$ плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют функциональной зависимости $y=f(x)$. Графнкн взаимно обратных функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ симметричны относительно бнссектрисы $x=y$.

К основным элементарным функциям относятся пять классов функций: степенные, показательные, логарифмнческне, тригонометрические и обратные тригонометрические.

АЗ-5.1

1. Найти области определения следующих функций:

а) $y=\sqrt{x^2-6x+5}$; б) $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$;

в) $y=\sqrt{25-x^2}+\lg\sin x$.

(*Ответ*: а) $(-\infty;\ 1]\cup[5;\ +\infty)$; б) $[-1/3;\ 1]$; в) $[-5;\ -\pi)\cup(0;\ \pi)$.)

2. Представить сложные функции в виде композиции функций, являющихся основными элементарными функциями:

а) $y=2^{\sin\sqrt[3]{x}}$; б) $y=\sqrt[3]{\lg\sin x^3}$;

в) $y=\operatorname{tg}\sqrt[5]{\lg x}$; г) $y=\operatorname{arctg}\sqrt[3]{2^{x^4}}$.

3. Построить графики функций:

а) $y=(2x+3)/(x-1)$; б) $y=|3x+4-x^2|$;

в) $y=-2\sin(2x+2)$; г) $y=x\sin x$.

Самостоятельная работа

1. 1. Найти область определения функции $y = \lg(2^{3x} - 4)$. (*Ответ*: $x > 2/3$.)

2. Для функции

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x^2, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

найти обратную. Построить графики данной и найденной функций.

2. 1. Найти область определения функции $y = \lg(-x^2 - 5x + 6)$. (*Ответ*: $x \in (-6;\ 1)$.)

2. Построить график функции

$$y = \begin{cases} 1 + x, & \text{если } x < 0, \\ 2\sin x, & \text{если } 0 \leqslant x < \pi, \\ x - \pi, & \text{если } x \geqslant \pi. \end{cases}$$

3. 1. Найти область определения функции $y = 1/\sqrt{x^2 + x}$. (*Ответ*: $(-\infty;\ -1) \cup (0;\ +\infty)$.)

2. Для функции

$$y = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 1, \\ x^2 - 2, & \text{если } x \geqslant 1, \end{cases}$$

найти обратную. Построить графики данной и найденной функций.

5.2. ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ. РАСКРЫТИЕ ПРОСТЕЙШИХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Число A называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $n > N$, где N — целое, выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$. Если A — предел последовательности $\{x_n\}$, то это записывается так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае — *расходящейся*.

Пример 1. Дана последовательность $\{x_n\} = \left\{\dfrac{2n+3}{n+1}\right\}$. Доказать, что ее предел $A = 2$.

► Попытаемся доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство

$$|x_n - A| = \left|\frac{2n+3}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n+3-2n-2}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Решив последнее неравенство, получим $n > 1/\varepsilon - 1$, следовательно, $N = [1/\varepsilon - 1] + 1$, где $[\alpha]$ — целая часть числа α. Таким образом, существует N, такое, что для любого $n > N$ выполняется $|x_n - 2| < \varepsilon$. ◄

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ *при* $x \to x_0$ (*в точке* $x=x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ ($\delta=\delta(\varepsilon)$), такое, что при $0 < |x-x_0| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$. Если A — предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$, то пишут: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. В самой точке x_0 функция $f(x)$ может и не существовать ($f(x_0)$ не определена). Аналогично запись $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = A$ обозначает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N=N(\varepsilon) > 0$, такое, что при $|x| > N$ выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$.

Если существует предел вида $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$, который обозначают также $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $f(x_0-0)$, то он называется *пределом слева функции* $f(x)$ *в точке* x_0. Аналогично если существует предел вида $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ (в другой записи $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ или $f(x_0+0)$), то он называется *пределом справа функции* $f(x)$ *в точке* x_0. Пределы слева и справа называются *односторонними*. Для существования предела функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы оба односторонних предела в точке x_0 существовали и были равны, т. е. $f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

Справедливы следующие основные теоремы о пределах.

Теорема 1. *Пусть существуют* $\lim\limits_{x \to x_0} f_i(x)$ $(i=\overline{1, n})$. *Тогда*

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{x \to x_0} f_i(x), \quad \lim_{x \to x_0} \prod_{i=1}^{n} f_i(x) = \prod_{i=1}^{n} \lim_{x \to x_0} f_i(x).$$

Теорема 2. *Пусть существуют* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0$. *Тогда*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x) / \lim_{x \to x_0} \varphi(x).$$

(Все записи верны и при $x_0 = \pm\infty$.)

Если условия этих теорем не выполняются, то могут возникнуть неопределенности вида $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ и др., которые в простейших случаях раскрываются с помощью алгебраических преобразований.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right)$.

▶ Имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Чтобы раскрыть ее, приведем выражение в скобках к общему знаменателю. Получим $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2-x}{x^2-4}$, т. е. неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которая легко раскрывается, если под знаком предела сократить дробь на общий множитель $x-2 \neq 0$. В итоге исходный предел сводится к $\lim\limits_{x \to 2} \left(-\frac{1}{x+2} \right) = -\frac{1}{4}$. ◀

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3 - x + 5}{x^3 + x^2 - 1}$.

▶ Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть ее, разделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на x^3. Получим

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}.$$

Знаменатель полученной дроби при $x\to\pm\infty$ не равен нулю, следовательно, можно применить теорему о пределе частного. Также применимы и другие теоремы о пределах, что в итоге приводит к равенству

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-x+5}{x^3+x^2-1}=\frac{\lim 2-\lim\frac{1}{x^2}+\lim\frac{5}{x^3}}{\lim 1+\lim\frac{1}{x}-\lim\frac{1}{x^3}}=2. \blacktriangleleft$$

АЗ-5.2

1. Доказать, что последовательность $\{x_n\}=\left\{\frac{3n+5}{n-1}\right\}$ имеет предел $A=3$.

Найти пределы указанных функций.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+3n-5}{1-n^2}$. (*Ответ*: -3.)

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2+4x^2+3x^3}{x^3-7x-10}$. (*Ответ*: 3.)

4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{7x^2+10x+20}{x^3-10x^2-1}$. (*Ответ*: 0.)

5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+3}{x^2-3}$. (*Ответ*: -1.)

6. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{8-x^3}$. (*Ответ*: 1/4.)

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-7x+6}$. (*Ответ*: 3/5.)

8. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$. (*Ответ*: 2/3.)

9. $\lim\limits_{x\to\infty}(x(\sqrt{x^2+4}-x))$. (*Ответ*: 2.)

10. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$. (*Ответ*: -1.)

Самостоятельная работа

Вычислить пределы указанных функций.

1. а) $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}$. (*Ответ*: а) 6; б) 1/148.)

2. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{x-1}-2}$. (*Ответ*: а) 3; б) 40.)

3. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+1}\right)\right)$. (*Ответ*: а) -1; б) 2.)

5.3. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Широко используются следующие два замечательных предела:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e\approx 2{,}71828.$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$.

▶ Так как $x\neq 0$ под знаком предела, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{7x}{3x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 7x}{7x}}{\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\frac{7}{3}.$$ ◀

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}$.

▶ Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1+2}{2x-1}\right)^{3x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1}.$$

Положим $\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{1}{y}$. Тогда $x=y-1/2$ и при $x\to\infty$, $y\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3y-1/2}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^3\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-1/2}\right)=e^3.$$

АЗ-5.3*

Найти пределы указанных функций.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}$. (*Ответ*: 3/2.)
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$. (*Ответ*: 6.)
3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(2(x-1))}{x^2-7x+6}$. (*Ответ*: $-2/5$.)
4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+3}{2x-1}\right)^x$. (*Ответ*: 0 или ∞.)
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x-1}$. (*Ответ*: e^4.)
6. $\lim\limits_{x\to\infty}((2x+1)(\ln(3x+1)-\ln(3x-2)))$. (*Ответ*: 2.)

5.4. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ (т. е. для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что при $0<|x-x_0|<\delta$ справедливо неравенство $|\alpha(x)|<\varepsilon$), то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией при* $x\to x_0$.

Для сравнения двух бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to x_0$ находят предел их отношения:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C. \tag{5.1}$$

Если $C\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми величинами одного и того же порядка*; если $C=0$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с* $\beta(x)$, а $\beta(x)$ — *бесконечно малой более низкого порядка по сравнению с* $\alpha(x)$.

Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=C\ (0<|C|<\infty),$$

то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой порядка k по сравнению с* $\beta(x)$ *при* $x\to x_0$.

Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$$

то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to x_0$ называются *эквивалентными (равносильными) величинами*: $\alpha(x)\sim\beta(x)$. Например, при $x\to 0$ $\sin ax\sim ax$, $\operatorname{tg} x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $e^{ax}-1\sim ax$.

Легко доказать, что предел отношения бесконечно малых функций

---

* В данном АЗ вместо самостоятельной работы предлагается контрольная, рассчитанная на 1 час (см. прил., с. 255).

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0$ равен пределу отношения эквивалентных им бесконечно малых функций $\alpha^*(x)$ и $\beta^*(x)$ при $x \to x_0$, т. е. верны предельные равенства:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha^*(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^*(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}.$$

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{\ln(1+x)}$.

▶ Поскольку $\sin 5x \sim 5x$, $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{x} = 5. ◀$$

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной при* $x = x_0$ (*в точке* x_0), если: 1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности; 2) существует конечный предел функции $f(x)$ в точке x_0; 3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5.2}$$

Если положить $x = x_0 + \Delta x$, то условие непрерывности (5.2) будет равносильно условию

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0,$$

т. е. функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f(x_0)$.

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области, называется *непрерывной в этой области.*

Пример 2. Доказать непрерывность функции $y = \sin 5x$ для любого $x \in \mathbf{R}$.

▶ Для любого приращения Δx независимой переменной приращение функции

$$\Delta y = \sin 5(x + \Delta x) - \sin 5x = 2 \cos\left(5x + \frac{5}{2}\Delta x\right) \cdot \sin \frac{5}{2}\Delta x.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2 \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(5x + \frac{5}{2}\Delta x\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin \frac{5}{2}\Delta x = 0,$$

так как $\cos 5x$ — ограниченная функция для любого $x \in \mathbf{R}$. Следовательно, функция $y = \sin 5x$ непрерывна на всей числовой прямой. ◀

Точка x_0, в которой нарушено хотя бы одно из трех условий непрерывности функции, называется *точкой разрыва функции.* Если в точке x_0 существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, такие, что $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 называется *точкой разрыва первого рода.* Если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ не существует или равен бесконечности, то точку x_0 называют *точкой разрыва второго рода.* Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ и функция $f(x)$ не определена в точке x_0, то точку x_0 называют *устранимой точкой разрыва функции.* Например, для функций $y = x \cos x$ и $y = \dfrac{\sin x}{x}$ точка $x = 0$ является устранимой точкой разрыва.

АЗ-5.4

1. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 3(x-2)}{x^2-3x+2}$. (*Ответ*: 3.)

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 10x}$. (*Ответ:* 1/2.)

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{\sin 7x}$. (*Ответ*: 1.)

4. Определить порядок бесконечно малой функции $y=7x^8/(x^4+1)$ относительно бесконечно малой x при $x\to 0$.

5. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases}(x^2-9)/(x-3), & \text{если } x\neq 3,\\ A, & \text{если } x=3.\end{cases}$$

При каких значениях A функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x=3$? Построить график функции.

6. Установить область непрерывности функции $y=(3x+3)/(2x+4)$ и найти ее точки разрыва.

7. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & \text{если } x<0,\\ \sin x, & \text{если } 0\leqslant x<\pi/2,\\ y=x-\pi/2+1, & \text{если } x\geqslant \pi/2.\end{cases}$$

Найти точки разрыва функции и построить ее график.

8. Исследовать на непрерывность функцию $y=3^{1/(x+1)}+1$ в точках $x_1=1$ и $x_2=-1$.

Самостоятельная работа

1. 1. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin 3(x+1)}{x^2+4x-5}$. (*Ответ*: $-3/4$.)

2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=(2x+4)/(3x+9)$ в точках $x_1=-1$, $x_2=-3$. Сделать схематический чертеж.

2. 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 7x}-1}{x^2+3x}$. (*Ответ*: 7/3.)

2. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x<0,\\ \cos x, & \text{если } 0\leqslant x<\pi/2,\\ 1-x, & \text{если } x\geqslant \pi/2.\end{cases}$$

Исследовать ее на непрерывность. Сделать схематический чертеж.

3. 1. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}(x^2-3x+2)}{x^2-4}$. (*Ответ*: 1/4.)

2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=(3x-2)/(x+2)$ в точках $x_1=0$ и $x_2=-2$. Сделать схематический чертеж.

5.5. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 5

ИДЗ-5.1

Найти указанные пределы.

1

1.1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

1.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$.

1.3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$.

1.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$.

1.5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+4}{x^2-5x+6}$.

1.6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12+x-x^2}{x^3-27}$.

1.7. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$.

1.8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$.

1.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$.

1.10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$.

1.11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$.

1.12. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

1.13. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$.

1.14. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$.

1.15. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$.

1.16. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$.

1.17. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$.

1.18. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2+2x-2}$.

1.19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$.

1.20. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-3x+2}{x^2-x-12}$.

1.21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$.

1.22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$.

1.23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$.

1.24. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$.

1.25. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$.

1.26. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+3x+15}{x^2-6x-27}$.

1.27. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$.

1.28. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$.

1.29. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$.

1.30. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$.

2

2.1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$.

2.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-10}{x^3-1}$.

2.3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$.

2.4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-8}$.

2.5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^2+x+1}{x^4+1}$.

2.6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-1}{x^4-1}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+3}{5x^2+3x-3}$.

2.8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$.

2.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

2.10. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{x^3+64}$.

2.11. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x^2+19x-5}{2x^2+11x+5}$.

2.12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x-2}$.

2.13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}$.

2.14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$.

2.15. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{9x^2+17x-2}{x^2+2x}$.

2.16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

2.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+5x}{3x^2+7x}$.

2.18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^4-5x^2+1}{x^2-1}$.

2.19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+5x-1}{x^2-5x+6}$.

2.20. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$.

2.21. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64}$.

2.22. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{x^2-1/4}$.

2.23. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^2-4x}$.

2.24. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+11x+10}{x^2-5x+14}$.

2.25. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+x-10}$.

2.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{4x^2-5x+1}$.

2.27. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-11x-6}{3x^2-20x+12}$.

2.28. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+2x-24}{2x^3+15x+18}$.

2.29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-4}{x^2-11x+18}$.

2.30. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{7x^2-27x-4}$.

3

3.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$.

3.10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$.

3.11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$.

3.12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$.

3.13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$.

3.14. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$.

3.16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$.

3.19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$.

3.21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$.

3.23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$.

3.24. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$.

3.25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4-2x^2-7}{3x^4+3x+5}$.

3.27. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4-5x^2-3x^5}{x^5+6x+8}$.

3.28. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-7x^2+3}{2+2x-x^3}$.

3.29. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2+2}$.

3.30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$.

4

4.1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$.

4.5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}$.

4.6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^6-5x^2+2}{2x^3+4x-5}$.

4.8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$.

4.9. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^2+5x+9}{1+4x-x^3}$.

4.10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$.

4.11. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+5x+7}{3x^4-2x^2+x}$.

4.12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$.

4.13. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2+1}$.

4.14. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-3x+1}{1+2x-x^4}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3+3x^2+5}{3x^2-4x+1}$.

4.16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2-5x+2}{4x^3+2x-1}$.

4.17. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{11x^3+3x}{2x^2-2x+1}$.

4.18. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^3+5x^2-3}{2x^2-x+7}$.

4.20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+4x-7}{x^4-2x^3+1}$.

4.21. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x^5-4x^3+3}{2x^3+x-7}$.

4.22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-7x+1}{x^3+4x^2-3}$.

4.23. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^4-2x^3+3}{2x^2+3x-7}$.

4.24. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^3+x^2-7}{2x^2-5x+3}$.

4.25. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^4+2x^2-8}{8x^3-4x+5}$.

4.26. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4+2x-4}{3x^2-4x+1}$.

4.27. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^3-2x+4}{2x^2+x-5}$.

4.28. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+5x^2-3x}{3x^2+x-10}$.

4.29. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+10x-11}{3x^4-2x+5}$.

4.30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3+3x-4}{2x^2-5x+1}$.

5

5.1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$.

5.2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-7x+2}{x^4+2x-4}$.

5.3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}$.

5.4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-x+7}{3x^4-5x^2+10}$.

5.5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$.

5.6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$.

5.7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-5x+2}{x^4+3x^2-9}$.

5.8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$.

5.9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-3x^2+2x}{x^2+7x+1}$.

5.10. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-7x+5}{4x^5-3x^3+2}$.

5.11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^5+6x^4-x^3}{2x^2+6x+1}$.

5.12. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4-3x-2x^2}{3x^4+5x}$.

5.13. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$.

5.14. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^4+7x^3-3}{3x^2-5x+1}$.

5.15. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+7}{2-3x+4x^2}$.

5.16. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3-3x+1}{7x+5}$.

5.17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x-7}{3x^4+2x^3+1}$.

5.18. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^4-3x^2}{1+2x+3x^2}$.

5.19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x+3}{x^3-4x^2-x}$.

5.20. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^4+5x}{2x^2-3x-7}$.

5.21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-5x+3}{3x^4-2x^2+x}$.

5.22. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^5-x^3}{4x^2+3x-6}$.

5.23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+1}{x^3-5x^2+4x}$.

5.24. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-x-3x^2}{x^3-16}$.

5.25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2-10x+7}{2x^3-3x}$.

5.26. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3-3x+1}{x^5+4x^3}$.

5.27. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-13}{x^7-3x^5-4x}$.

5.28. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-3x+1}{x^3+2x^2+5}$.

5.29. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-81}{3x^2+4x+2}$.

5.30. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x+4}{3x^3-5x+1}$.

6

6.1. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$.

6.2. $\lim\limits_{x\to-4} \dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$

6.3. $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$.

6.4. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$.

6.5. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$.

6.6. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$.

6.7. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$.

6.8. $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$.

6.9. $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$.

6.10. $\lim\limits_{x\to-5} \dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$.

6.11. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

6.12. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7x}}$.

6.13. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

6.14. $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

6.15. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$.

6.16. $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$.

6.17. $\lim\limits_{x\to7} \dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$.

6.18. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$.

6.19. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$.

6.20. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$.

6.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

6.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$

6.23. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$.

6.24. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$.

6.25. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$.

6.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$.

6.27. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$.

6.28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2}{\sqrt{8+x}-3}$.

6.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$.

6.30. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$

7

7.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$.

7.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$

7.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$

7.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$.

7.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$.

7.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$.

7.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$.

7.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$.

7.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$.

7.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$.

7.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$.

7.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$.

7.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$.

7.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$.

7.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$.

7.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$.

7.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$.

7.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$.

7.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$.

7.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$.

7.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-3x}{5-3x}\right)^{x}$.

7.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$.

7.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$.

7.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$.

7.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$.

7.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+1}$.

7.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$.

7.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$.

7.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{3-2x}$.

7.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$.

8

8.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$.

8.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$.

8.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$.

8.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$.

8.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$.

8.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$.

8.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{4x}$.

8.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{5x}$.

8.9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$.

8.10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$.

8.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$.

8.12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$.

8.13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$.

8.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$.

8.15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}$.

8.16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-4}{x+6}\right)^{x-1}$.

8.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$.

8.18. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$.

8.19. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$.

8.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5}{x-10}\right)^{5x}$.

8.21. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+7}{x+4}\right)^{4x}$.

8.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$.

8.23. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5x-7}{x+6}\right)^{2x}$.

8.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-4x}{2-x}\right)^{6x}$.

8.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{3-x}\right)^{-x}$.

8.26. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x}$.

8.27. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)^{3x}$.

8.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-10x}\right)^{5x}$.

8.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{9x-4}\right)^{2x}$.

8.30. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+5}{4x-2}\right)^{3x}$.

9

9.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$.

9.2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x - \sin x}{5x}$.

9.3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}$.

9.4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{2\sin x}$.

9.5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2}$.

9.6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$.

9.7. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

9.8. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{1-\sin x}{\pi - 2x}$.

9.9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2}$.

9.10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x \operatorname{tg} x}$.

9.11. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$.

9.12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2}$.

9.13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x + \sin 3x}{x \sin x}$.

9.14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$.

9.15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}$.

9.16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$.

9.17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}$.

9.18. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1-\sin 2x}{\pi - 4x}$.

9.19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}$.

9.20. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin 2x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} 2x}\right)$.

9.21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}$.

9.22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 5x}{x^2 - x}$.

9.23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 2x}{x \arcsin x}$.

9.24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x \sin x}$.

9.25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 5x - \cos x}{4x^2}$.

9.26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}$.

9.27. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{1-\sin x}{(\pi/2 - x)^2}$.

9.28. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\pi/2 - x)\operatorname{tg} x$.

9.29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7x}{\sin x + \sin 7x}$.

9.30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}$.

Решение типового варианта

Найти указанные пределы.

1. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{5x^2 + 13x + 6}{3x^2 + 2x - 8}$.

▶ $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x-4)} =$

$= \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{5x+3}{3x-4} = \dfrac{7}{10} = 0{,}7.$ ◀

2. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3x^2-10x-8}{4x^2+6x-64}.$

▶ $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3x^2-10x-8}{4x^2+6x-64} = \dfrac{0}{24} = 0.$ ◀

3. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}.$

▶ $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4(7+2/x+5/x^4)}{x^4(6+3/x^2-7/x^3)} = \dfrac{7}{6}.$ ◀

4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}.$

▶ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x(10-3/x)}{x^3(2+4/x^2+3/x^3)} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{10-3/x}{x^2(2+4/x^2+3/x^3)} = \dfrac{10}{\infty} = 0.$ ◀

5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}.$

▶ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^5(2+3/x^2-4/x^4)}{x^2(3-4/x+2/x^2)} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3(2+3/x^2-4/x^4)}{3-4/x+2/x^2} = \dfrac{-\infty}{3} = -\infty.$ ◀

6. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}.$

▶ $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(\sqrt{21+x}-5)(\sqrt{21+x}+5)}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)} =$

$= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{21+x-25}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)} =$

$= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{(x-4)(x^2+4x+16)(\sqrt{21+x}+5)} =$

$= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{(x^2+4x+16)(\sqrt{21+x}+5)} = \dfrac{1}{480}.$ ◀

7. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}.$

$$\blacktriangleright \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x-3}-1\right)^{2-5x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2x+3}{2x-3}\right)^{2-5x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{2-5x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{(2x-3)/3}\right)^{3(2-5x)/(2x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{3(2-5x)/(2x-3)} = e^{-15/2}. \blacktriangleleft$$

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4x+3}{2x-5}\right)^{1+7x}$.

$$\blacktriangleright \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x+3}{2x-5}\right)^{1+7x} = \lim_{x\to-\infty} 2^{1+7x} = 2^{-\infty} = 0. \blacktriangleleft$$

9. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\sin(x/2)}{\pi^2-x^2}$.

$$\blacktriangleright \lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin(x/2)}{\pi^2-x^2} = \lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos(\pi/2-x/2)}{\pi^2-x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2((\pi-x)/4)}{(\pi-x)(\pi+x)} = \lim_{x\to\pi}\frac{2\sin((\pi-x)/4)\sin((\pi-x)/4)}{4\cdot\frac{\pi-x}{4}(\pi+x)} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin((\pi-x)/4)}{\pi+x} = \frac{1}{2}\,\frac{0}{2\pi} = 0. \blacktriangleleft$$

ИДЗ-5.2

1. Доказать, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x\to0$ являются бесконечно малыми одного порядка малости.

1.1. $f(x)=\operatorname{tg}2x$, $\varphi(x)=\arcsin x$.
1.2. $f(x)=1-\cos x$, $\varphi(x)=3x^2$.
1.3. $f(x)=\operatorname{arctg}^2 3x$, $\varphi(x)=4x^2$.
1.4. $f(x)=\sin 3x-\sin x$, $\varphi(x)=5x$.
1.5. $f(x)=\cos 3x-\cos x$, $\varphi(x)=7x^2$.
1.6. $f(x)=x^2-\cos 2x$, $\varphi(x)=6x^2$.
1.7. $f(x)=\sqrt{1+x}-1$, $\varphi(x)=2x$.
1.8. $f(x)=\sin x+\sin 5x$, $\varphi(x)=2x$.
1.9. $f(x)=3x/(1-x)$, $\varphi(x)=x/(4+x)$.
1.10. $f(x)=3x^2/(2+x)$, $\varphi(x)=7x^2$.
1.11. $f(x)=2x^3$, $\varphi(x)=5x^3/(4-x)$.
1.12. $f(x)=x^2/(5+x)$, $\varphi(x)=4x^2/(x-1)$.
1.13. $f(x)=\sin 8x$, $\varphi(x)=\arcsin 5x$.
1.14. $f(x)=\sin 3x+\sin x$, $\varphi(x)=10x$.
1.15. $f(x)=\cos 7x-\cos x$, $\varphi(x)=2x^2$.

1.16. $f(x) = 1 - \cos 2x,\ \varphi(x) = 8x^2.$
1.17. $f(x) = 3\sin^2 4x,\ \varphi(x) = x^2 - x^4.$
1.18. $f(x) = \operatorname{tg}(x^2 + 2x),\ \varphi(x) = x^2 + 2x.$
1.19. $f(x) = \arcsin(x^2 - x),\ \varphi(x) = x^3 - x.$
1.20. $f(x) = \sin 7x + \sin x,\ \varphi(x) = 4x.$
1.21. $f(x) = \sqrt{4 + x} + 2,\ \varphi(x) = 3x.$
1.22. $f(x) = \sin(x^2 - 2x),\ \varphi(x) = x^4 - 8x.$
1.23. $f(x) = 2x/(3 - x),\ \varphi(x) = 2x - x^2.$
1.24. $f(x) = x^2/(7 + x),\ \varphi(x) = 3x^3 - x^2.$
1.25. $f(x) = \sin(x^2 + 5x),\ \varphi(x) = x^3 - 25x.$
1.26. $f(x) = \cos x - \cos^3 x,\ \varphi(x) = 6x^2.$
1.27. $f(x) = \arcsin 2x,\ \varphi(x) = 8x.$
1.28. $f(x) = 1 - \cos 4x,\ \varphi(x) = x \sin 2x.$
1.29. $f(x) = \sqrt{9 - x} - 3,\ \varphi(x) = 2x.$
1.30. $f(x) = \cos 3x - \cos 5x,\ \varphi(x) = x^2.$

2. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

2.1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 3x^2)}{x^3 - 5x^2}.$

2.2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 3x}.$

2.3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 2x}.$

2.4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x^3 + 27x}.$

2.5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 6x}{2x^2 - 3x}.$

2.6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 3x}{2x}.$

2.7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 2x}.$

2.8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\sin 2x}.$

2.9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}.$

2.10. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sin(x - 3)}{x^2 - 5x + 6}.$

2.11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{2x^2}.$

2.12. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos 6x}{4x^2}.$

2.13. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\ln(1 + 2x)}.$

2.14. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 4x}{\operatorname{tg} 5x}.$

2.15. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 2x}.$

2.16. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\operatorname{tg}(x + 2)}{x^2 - 4}.$

2.17. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\sin(x + 2)}{x^3 + 8}.$

2.18. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg} 4x}.$

2.19. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^3 - 64}{\operatorname{tg}(x - 4)}.$

2.20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}.$

2.21. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 4x^3)}{2x^3}.$

2.22. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\operatorname{tg} 2x}.$

2.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$.

2.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg} 4x}$.

2.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\operatorname{tg} 2x}$.

2.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}$.

2.27. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^3-27}$.

2.28. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\operatorname{tg}(x+5)}{x^2-25}$.

2.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{2x^2}$.

2.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}$.

3. Исследовать данные функции на непрерывность и построить их графики.

3.1. $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1, \\ x^2+2, & -1\leqslant x<1, \\ 2x, & x\geqslant 1. \end{cases}$

3.2. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leqslant 0, \\ (x+1)^2, & 0<x\leqslant 2, \\ -x+4, & x>2. \end{cases}$

3.3. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\leqslant -1, \\ x^2+1, & -1<x\leqslant 1, \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$

3.4. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\leqslant 0, \\ -(x-1)^2, & 0<x<2, \\ x-3, & x\geqslant 2. \end{cases}$

3.5. $f(x)=\begin{cases} -2(x+1), & x\leqslant -1, \\ (x+1)^3, & -1<x<0, \\ x, & x\geqslant 0. \end{cases}$

3.6. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\leqslant 0, \\ x^2, & 0<x\leqslant 2, \\ x+1, & x>2. \end{cases}$

3.7. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\leqslant 1, \\ 2x, & 1<x\leqslant 3, \\ x+2, & x>3. \end{cases}$

3.8. $f(x)=\begin{cases} x-3, & x<0, \\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant 4, \\ 3+x, & x>4. \end{cases}$

3.9. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x\leqslant 0, \\ 0, & 0<x\leqslant 2, \\ x-2, & x>2. \end{cases}$

3.10. $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x\leqslant 0, \\ x, & 0<x\leqslant 1, \\ 2+x, & x>1. \end{cases}$

3.11. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0, \\ x, & 0\leqslant x\leqslant 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$

3.12. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\leqslant \pi/2, \\ 0, & \pi/2<x<\pi, \\ 2, & x\geqslant \pi. \end{cases}$

3.13. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\leqslant 0, \\ x^2, & 0<x<2, \\ 2x, & x\geqslant 2. \end{cases}$

3.14. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ x^2-1, & 0\leqslant x<1, \\ -x, & x\geqslant 1. \end{cases}$

3.15. $f(x)=\begin{cases} -x, & x<0, \\ x^2+1, & 0\leqslant x<2, \\ x+1, & x\geqslant 2. \end{cases}$

3.16. $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\leqslant 0, \\ 1, & 0<x\leqslant 2, \\ x^2-2, & x>2. \end{cases}$

3.17. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ \sin x, & 0\leqslant x<\pi, \\ 3, & x\geqslant \pi. \end{cases}$

3.18. $f(x)=\begin{cases} -x+1, & x<-1, \\ x^2+1, & -1\leqslant x\leqslant 2, \\ 2x, & x>2. \end{cases}$

3.19. $f(x)=\begin{cases} 1, & x\leqslant 0, \\ 2^x, & 0<x\leqslant 2, \\ x+3, & x>2. \end{cases}$

3.20. $f(x)=\begin{cases} -x+2, & x\leqslant -2, \\ x^3, & -2<x\leqslant 1, \\ 2, & x>1. \end{cases}$

3.21. $f(x)=\begin{cases} 3x+4, & x\leqslant -1, \\ x^2-2, & -1<x<2, \\ x, & x\geqslant 2. \end{cases}$

3.22. $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 1, \\ (x-2)^2, & 1<x<3, \\ -x+6, & x\geqslant 3. \end{cases}$

3.23. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1, \\ x^2+2, & 1\leqslant x\leqslant 2, \\ -2x, & x>2. \end{cases}$

3.24. $f(x)=\begin{cases} x^3, & x<-1, \\ x-1, & -1\leqslant x\leqslant 3, \\ -x+5, & x>3. \end{cases}$

3.25. $f(x)=\begin{cases} x, & x<-2, \\ -x+1, & -2\leqslant x\leqslant 1, \\ x^2-1, & x>1. \end{cases}$

3.26. $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\leqslant 0, \\ -x^2+4, & 0<x<2, \\ x-2, & x\geqslant 2. \end{cases}$

3.27. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant -1, \\ x^2-1, & -1<x\leqslant 2, \\ 2x, & x>2. \end{cases}$

3.28. $f(x)=\begin{cases} -1, & x<0, \\ \cos x, & 0\leqslant x\leqslant \pi, \\ 1-x, & x>\pi. \end{cases}$

3.29. $f(x)=\begin{cases} 2, & x<-1, \\ 1-x, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ \ln x, & x>1. \end{cases}$

3.30. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\leqslant 0, \\ x^3, & 0<x\leqslant 2, \\ x+4, & x>2. \end{cases}$

4. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках.

4.1. $f(x)=2^{1/(x-3)}+1$; $x_1=3$, $x_2=4$.
4.2. $f(x)=5^{1/(x-3)}-1$; $x_1=3$, $x_2=4$.
4.3. $f(x)=(x+7)/(x-2)$; $x_1=2$, $x_2=3$.
4.4. $f(x)=(x-5)/(x+3)$; $x_1=-2$, $x_2=-3$.
4.5. $f(x)=4^{1/(3-x)}+2$; $x_1=2$, $x_2=3$.
4.6. $f(x)=9^{1/(2-x)}$; $x_1=0$, $x_2=2$.
4.7. $f(x)=2^{1/(x-5)}+1$; $x_1=4$, $x_2=5$.
4.8. $f(x)=5^{1/(x-4)}-2$; $x_1=3$, $x_2=4$.
4.9. $f(x)=6^{1/(x-3)}+3$; $x_1=3$, $x_2=4$.
4.10. $f(x)=7^{1/(5-x)}+1$; $x_1=4$, $x_2=5$.
4.11. $f(x)=(x-3)(x+4)$; $x_1=-5$, $x_2=-4$.
4.12. $f(x)=(x+5)/(x-2)$; $x_1=3$, $x_2=2$.
4.13. $f(x)=5^{2/(x-3)}$; $x_1=3$, $x_2=4$.
4.14. $f(x)=4^{2/(x-1)}-3$; $x_1=1$, $x_2=2$.
4.15. $f(x)=2^{5/(1-x)}-1$; $x_1=0$, $x_2=1$.
4.16. $f(x)=8^{4/(x-2)}-1$; $x_1=2$, $x_2=3$.
4.17. $f(x)=5^{4/(3-x)}+1$; $x_1=2$, $x_2=3$.
4.18. $f(x)=3x/(x-4)$; $x_1=4$, $x_2=5$.

4.19. $f(x)=2x/(x^2-1)$; $x_1=1$, $x_2=2$.
4.20. $f(x)=2^{3/(x+2)}+1$; $x_1=-2$, $x_2=-1$.
4.21. $f(x)=4^{3/(x-2)}+2$; $x_1=2$, $x_2=3$.
4.22. $f(x)=3^{2/(x+1)}-2$; $x_1=-1$, $x_2=0$.
4.23. $f(x)=5^{3/(x+4)}+1$; $x_1=-5$, $x_2=-4$.
4.24. $f(x)=(x-4)/(x+2)$; $x_1=-2$, $x_2=-1$.
4.25. $f(x)=(x-4)/(x+3)$; $x_1=-3$, $x_2=-2$.
4.26. $f(x)=(x+5)/(x-3)$; $x_1=3$, $x_2=4$.
4.27. $f(x)=3^{4/(1-x)}+1$; $x_1=1$, $x_2=2$.
4.28. $f(x)=4x/(x+5)$; $x_1=-5$, $x_2=-4$.
4.29. $f(x)=6^{2/(4-x)}$; $x_1=3$, $x_2=4$.
4.30. $f(x)=(x+1)/(x-2)$; $x_1=2$, $x_2=3$.

Решение типового варианта

1. Доказать, что функции $f(x)=\cos 2x-\cos^3 2x$ и $\varphi(x)=3x^2-5x^3$ при $x\to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка малости.

▶ Находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos^3 2x}{3x^2-5x^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x(1-\cos^2 2x)}{x^2(3-5x)}=\lim_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{\cos 2x\cdot\sin^2 2x}{x^2(3-5x)}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{8\cos 2x\cdot\sin 2x\cdot\sin 2x}{2x2x(3-5x)}=8/3.$$

Так как предел отношения функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ равен отличной от нуля постоянной, то в соответствии с определением (см. формулу (5.1)) данные функции — бесконечно малые одного порядка малости. ◀

2. Найти предел, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

▶ Имеем: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 8x}{\ln(1+4x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x}{4x}=2.$ ◀

3. Исследовать данную функцию на непрерывность и построить ее график:

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & -\infty<x\leqslant 0,\\ (x-1)^2, & 0<x\leqslant 2,\\ 5-x, & 2<x<+\infty.\end{cases}$$

▶ Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;0)$, $(0;2)$ и $(2;+\infty)$, где она задана непрерывными элементарными функциями. Следовательно, разрыв возможен только в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Для точки $x_1 = 0$ имеем:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} x^2 = 0, \quad \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (x-1)^2 = 1,$$
$$f(0) = x^2 \big|_{x=0} = 0,$$

т. е. функция $f(x)$ в точке $x_1 = 0$ имеет разрыв первого рода.

Для точки $x_2 = 2$ находим:

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} (x-1)^2 = 1,$$
$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} (5-x) = 3,$$
$$f(2) = (x-1)^2 \big|_{x=2} = 1,$$

т. е. в точке $x_2 = 2$ функция также имеет разрыв первого рода.

График данной функции изображен на рис. 5.1. ◀

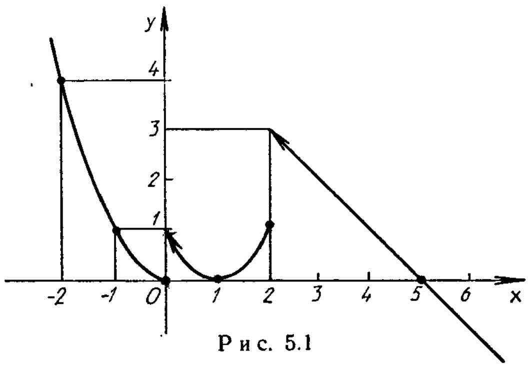


Рис. 5.1

4. Исследовать функцию $f(x) = 8^{1/(x-3)} + 1$ на непрерывность в точках $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

▶ Для точки $x_1 = 3$ имеем:

$$\lim_{x \to 3-0} f(x) = \lim_{x \to 3-0} (8^{1/(x-3)} + 1) = 8^{-\infty} + 1 = 1,$$
$$\lim_{x \to 3+0} f(x) = \lim_{x \to 3+0} (8^{1/(x-3)} + 1) = 8^{\infty} + 1 = \infty,$$

т. е. в точке $x_1 = 3$ функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв ($x_1 = 3$ — точка разрыва второго рода).

Для точки $x_2 = 4$ имеем:

$$\lim_{x \to 4-0} f(x) = \lim_{x \to 4-0} (8^{1/(x-3)} + 1) = 9,$$

$$\lim_{x\to 4+0} f(x) = \lim_{x\to 4+0} (8^{1/(x-3)}+1) = 9,$$
$$f(4) = 8^{1/(4-3)}+1 = 9.$$

Следовательно, в точке $x_2 = 4$ функция $f(x)$ непрерывна. ◀

5.6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 5

Найти указанные пределы.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2+n)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 10n^2 + 1}$. (*Ответ*: 19 800.)

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lg(n^2+2n\cos n+1)}{1+\lg(n+1)}$. (*Ответ*: 2.)

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n^2-n+1)}{\ln(n^{10}+n+1)}$. $\left(\textit{Ответ}\text{: } \dfrac{1}{5}.\right)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$ $(a \neq 0)$. $\left(\textit{Ответ}\text{:} \begin{cases} 1, & |a| > 1, \\ 0, & |a| = 1, \\ -1, & |a| < 1. \end{cases}\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$. $\left(\textit{Ответ}\text{: } \dfrac{1}{3}.\right)$

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{101} - 101x + 100}{x^2 - 2x + 1}$. (*Ответ*: 5050.)

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{2x^2+10x+1} - \sqrt[7]{2x^2+10x+1}}{x}$. $\left(\textit{Ответ}\text{: } \dfrac{4}{7}.\right)$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[n]{(1+x^2)(2+x^2)\cdots(n+x^2)} - x^2\right)(n \in \mathbf{N})$.

$\left(\textit{Ответ}\text{: } \dfrac{n+1}{2}.\right)$

9. $\lim\limits_{x\to 0} (\sqrt{1+x} - x)^{1/x}$. $\left(\textit{Ответ}\text{: } \dfrac{1}{\sqrt{e}}.\right)$

10. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{\pi^2 - x^2}$. $\left(\textit{Ответ}\text{: } \dfrac{1}{2\pi}.\right)$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(ax+1)^n}{x^n+b}$, где $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$; a, b — постоянные. (*Ответ*: a^n, если $n > 0$; 0, если $n < 0$, $b \neq 0$; a^n, если $n < 0$, $a \neq 0$, $b = 0$; ∞, если $n < 0$, $a = b = 0$.)

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{3^n}\right)$. $\left(\textit{Ответ}\text{: } \dfrac{1}{4}.\right)$

Найти точки разрыва данных функций, указать характер точек разрыва и построить графики этих функций.

13. $y = 1/\lg|x|$. (*Ответ*: $x_1 = 0$ — устранимая точка разрыва, $x_{2,3}=\pm 1$ — точки разрывов второго рода.)

14. $y=x\sin(\pi/x)$. (*Ответ*: $x=0$ — устранимая точка разрыва.)

15. $y=1/(1+3^{1/x})$. (*Ответ*: $x=0$ — точка разрыва первого рода.)

16. $y=1/(1+2^{\lg x})$. $\Big($*Ответ*: $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$— точки разрыва первого рода.$\Big)$

17. $y=(1+1/x)^x$. (*Ответ*: $x=-1$ — точка разрыва второго рода, $x=0$ — устранимая точка разрыва.)

18. $y=1/(1-e^{1-x})$. (*Ответ*: $x=1$ — точка разрыва второго рода.)

19. Круглая пластина радиусом a с закрепленными краями находится под действием силы P, приложенной к ее центру. Прогиб на расстоянии x от центра пластины выражается следующей формулой:

$$y=Pkx^2\ln\frac{x}{a}+P\frac{k}{2}(a^2-x^2),$$

где k — коэффициент, связанный с прочностными характеристиками материала и формой пластины. Найти прогиб в центре пластины. (*Ответ*: $Pka^2/2$.)

20. Шарнирно-опорная балка под действием равномерно распределенной нагрузки q и сжимающей силы N прогибается. Прогиб в середине балки вычисляется по формуле

$$f=\frac{ql^4}{EIu^4}\left(\frac{1}{\cos(u/2)}-1-\frac{u^2}{8}\right),$$

где $u=l\sqrt{\frac{N}{EI}}$; EI — жесткость балки; l — длина балки. Показать, что: а) при $u\to 0$ ($EI\to\infty$) балка не должна прогибаться, т. е. $f\to 0$; б) при $u\to\pi$ ($N\to\pi^2EI/l^2$) $f\to\infty$, т. е. существует критическая сила, при которой балка «разрушается», что математически соответствует ее бесконечному прогибу.

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

6.1. ПРОИЗВОДНАЯ, ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ. ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Напомним, что *приращением функции* $y=f(x)$ называется разность

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x),$$

где Δx — приращение аргумента x. Из рис. 6.1 видно, что

$$\Delta y/\Delta x = \operatorname{tg} \beta. \tag{6.1}$$

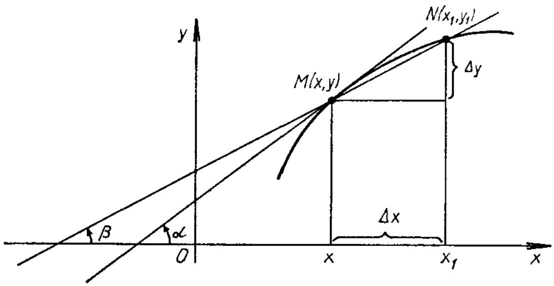


Рис. 6.1

Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю называется *производной функции* $y=f(x)$ *в точке* x и обозначается одним из следующих символов: y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$. Таким образом, по определению

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{6.2}$$

Если указанный в формуле (6.2) предел существует, то функцию $f(x)$ называют *дифференцируемой в точке* x, а операцию нахождения производной y' — *дифференцированием*.

Из равенства (6.1) и определения производной (см. формулу (6.2)) следует, что производная в точке x равна тангенсу угла α наклона касательной, проведенной в точке $M(x, y)$, к графику функции $y=f(x)$ (см. рис. 6.1).

Легко показать, что с физической точки зрения производная $y' = f'(x)$ определяет скорость изменения функции в точке x относительно аргумента x.

Если C — постоянное число и $u = u(x)$, $v = v(x)$ — некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие *правила дифференцирования:*

1) $(C)' = 0$;
2) $(x)' = 1$;
3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
4) $(Cu)' = Cu'$;
5) $(uv)' = u'v + uv'$;
6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$;
7) $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{Cv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$;
8) если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, т. е. $y = f(\varphi(x))$ — сложная функция, составленная из дифференцируемых функций, то

$$y'_x = y'_u u'_x \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx};$$

9) если для функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция $x = g(y)$ и $\dfrac{dg}{dy} = g'(y) \neq 0$, то

$$f'(x) = 1/g'(y).$$

На основании определения производной и правил дифференцирования можно составить *таблицу производных основных элементарных функций:*

1) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$ $(\alpha \in \mathbf{R})$;
2) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$;
3) $(e^u)' = e^u u'$;
4) $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} u'$;
5) $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} u'$;
6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
8) $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} u'$;
9) $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} u'$;
10) $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$;
11) $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$;
12) $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} u'$;
13) $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} u'$;
14) $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$;
15) $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;
16) $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} u'$;
17) $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} u'$.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали (перпендикуляра) к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

При $f'(x_0) = 0$ уравнение нормали имеет вид $x = x_0$.

Углом между кривыми в точке их пересечения называют угол между касательными к кривым в этой точке.

Пример 1. Найти производную функции $y=\frac{2x}{3x+1}$, воспользовавшись определением производной (см. формулу (6.2)).

► При любом приращении Δx имеем:

$$\Delta y=\frac{2(x+\Delta x)}{3(x+\Delta x)+1}-\frac{2x}{3x+1}=\frac{6x^2+6x\Delta x+2\Delta x-6x^2-6x\Delta x-2x}{(3(x+\Delta x)+1)(3x+1)}=$$

$$=\frac{2\Delta x}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)}.$$

Так как

$$\Delta y/\Delta x=\frac{2}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)},$$

то

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)}=\frac{2}{(3x+1)^2}. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Найти значение производной функции $y=|x|$ в точке $x=0$.

► При любом приращении независимой переменной x, равном Δx, приращение функции в точке $x=0$

$$\Delta y=|\Delta x|=\begin{cases}-\Delta x, & \text{если } \Delta x<0,\\ \Delta x, & \text{если } \Delta x>0.\end{cases}$$

Из определения производной следует, что

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}-1, & \text{если } \Delta x<0,\\ 1, & \text{если } \Delta x>0.\end{cases}$$

Это означает, что в точке $x=0$ функция $y=|x|$ не имеет производной, хотя она и непрерывна в этой точке, поскольку

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0. \blacktriangleleft$$

Таким образом, не всякая функция, непрерывная в некоторой точке x, дифференцируема в этой точке. Но легко показать, что любая функция непрерывна во всех тех точках x, в которых она дифференцируема.

АЗ-6.1

1. Найти производную функции $y=3x^3-2x^2+3x-1$, воспользовавшись определением производной (см. формулу (6.2)).

2. Установить, будет ли функция $y=\sqrt[3]{x}$ непрерывной и дифференцируемой в точке $x=0$.

3. Найти производные следующих функций:

а) $y=5x^4-3\sqrt[7]{x^3}+7/x^5+4$;
б) $y=x^3\sin x$;
в) $y=(x^4+1)/(x^4-1)$;

г) $y=(x^5+3x-1)^4$;

д) $y=\sqrt[3]{((x^3+1)/(x^3-1))^2}$.

4. Составить уравнеиия касательной и нормали к кривой $y=x^3+2x-2$ в точке с абсциссой $x_0=1$. (*Ответ*: $y-5x+4=0$; $5y+x-6=0$.)

5. Найти углы, под которыми пересекаются линии, заданные уравнеииями $y=x^2$ и $x^2+2y^2=3$. (*Ответ*: 90°, 90°.)

Самостоятельная работа

1. 1. Найти производные следующих функций:

а) $y=3x^3+5\sqrt[3]{x^5}-4/x^3$;

б) $y=x^3\sin x\cdot\ln x$;

в) $y=\sqrt{(x^3+1)/(x^3-1)}$.

2. Записать уравнения касательной и нормали к кривой $y=\ln(x^2-4x+4)$ в точке $x_0=1$. (*Ответ*: $2x+y-2=0$; $x-2y-1=0$.)

2. 1. Воспользовавшись определеиием производной (см. формулу (6.2)), найти производную функции $y=(3x-1)/(2x+5)$. (*Ответ*: $y'=17/(2x+5)^2$.)

2. Найти производные следующих функций:

а) $y=\sqrt[7]{x^5}-2/x^4+7x^6$;

б) $y=(x^9+1)\cos 5x$;

в) $y=((x^4+1)/(x^4-1))^3$.

3. 1. Найти производные следующих функций:

а) $y=4\sqrt{x}+4/\sqrt{x}+3x^2$;

б) $y=x^3\operatorname{tg}x\cdot e^{2x}$;

в) $y=(\sin^2 x)/(x^3+1)$.

2. Расстояние, пройденное материальной точкой за время t с, $s=\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3+2t+1$ (s — в метрах). Найти скорость движения данной точки в моменты времени $t=0$; 1; 2 с. (*Ответ*: 2 м/с; 2 м/с; 6 м/с.)

АЗ-6.2

Используя формулы и правила дифференцирования, найти производные данных функций.

1. а) $y=x^3\sin 3x$; б) $y=e^x\operatorname{tg}4x$;

в) $y=\sqrt[3]{x^4+\sin^4 x}$; г) $y=x\operatorname{ctg}^2 7x$;

д) $y=2^{-\cos^4 5x}$; е) $y=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$

2. а) $y=(2^{x^4}-\operatorname{tg}^4 x)^3$; б) $y=\ln^5(x-2^{-x})$;

в) $y=\sin(\operatorname{tg}\sqrt{x})$; г) $y=x\sin^2 x\cdot 2^{x^2}$;

д) $y=2^{x/\ln x}$; е) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$.

3. а) $y=e^{-\sqrt{x^2+2x+2}}$; б) $y=\operatorname{sh}^3 x^2$;

в) $y=(2^{\operatorname{tg} 3x}+\operatorname{tg} 3x)^2$; г) $y=3^{\operatorname{tg}^3 5x}$.

Самостоятельная работа

Найти производные следующих функций.

1. а) $y=x\sin^3 3x$; б) $y=\sqrt{\dfrac{\cos^2 x+1}{\sin 2x+1}}$;

в) $y=(2^{\cos 3x}+\sin 3x)^3$; г) $y=x\cos^2 x\cdot e^{x^2}$.

2. а) $y=x^3e^{\lg 3x}$; б) $y=(\sin^3 x+\cos^3 2x)^2$;

в) $y=\ln(x^4-\sin^3 x)$; г) $y=x\sin 7x\cdot\operatorname{tg}^2 x$.

3. а) $y=x\operatorname{ctg}^2 5x$; б) $y=(x^3+\operatorname{tg}^3 2x)^2$;

в) $y=\sin(x^5-\operatorname{tg}^2 x)$; г) $y=x^3\cos 2x\cdot e^{-x^2}$.

6.2. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Логарифмической производной функции $y=f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т. е.

$$(\ln f(x))'=f'(x)/f(x).$$

Последовательное применение логарифмирования и дифференцирования функций называют *логарифмическим дифференцированием.* В некоторых случаях предварительное логарифмирование функции упрощает нахождение ее производной. Например, при нахождении производной функции $y=u^v$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$, предварительное логарифмирование приводит к формуле

$$y'=u^v\ln u\cdot v'+vu^{v-1}\cdot u'.$$

Пример 1. Найти производную функции $y=(\sin 2x)^{x^3}$

▶ Логарифмируя данную функцию, получаем

$$\ln y=x^3\ln\sin 2x.$$

Дифференцируем обе части последнего равенства по x:

$$(\ln y)'=(x^3)'\ln\sin 2x+x^3(\ln\sin 2x)'.$$

Отсюда

$$\frac{y'}{y}=3x^2\ln\sin 2x+x^3\frac{1}{\sin 2x}2\cos 2x.$$

Далее,

$$y'=y(3x^2\ln\sin 2x+2x^3\operatorname{ctg} 2x).$$

Окончательно имеем:

$$y'=(\sin 2x)^{x^3}(3x^2\ln\sin 2x+2x^3\operatorname{ctg} 2x).$$ ◀

Если зависимость между переменными y и x задана в неявном виде уравнением $F(x, y)=0$, то для нахождения производной $y'=y'_x$ в простейших случаях достаточно продифференцировать обе части уравнения $F(x, y)=0$, считая y функцией от x, и из полученного уравнения, линейного относительно y', найти производную.

Пример 2. Найти производную функции y', если $x^3+y^3-3xy=0$.

▶ Дифференцируем обе части данного уравнения, считая y функцией от x:

$$3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0.$$

Отсюда находим

$$y'=(3x^2-3y)/(3x-3y^2). \blacktriangleleft$$

АЗ-6.3

1. Найти производные указанных функций:
а) $y=3^{x^2}-\operatorname{tg}^4 2x$; б) $y=x^3\operatorname{th}^3 x$;
в) $y=\lg^4(x^5-\sin^5 2x)$; г) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{1+e^{-x^3}}$.

2. Найти производные следующих функций:
а) $y=(\sin 3x)^{\cos 5x}$; б) $y=(x^3+1)^{\operatorname{tg} 2x}$.

3. Найти производные функций y, заданных неявно следующими уравнениями:
а) $e^{xy}-x^3-y^3=3$; б) $xy-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=3$; в) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=a$. (*Ответ*: а) $y'=(3x^2-e^{xy}y)/(-3y^2+e^{xy}x)$; б) $y'=-(x^2y+y^3-x)/(x^3+xy^2+y)$; в) $y=-\sqrt[3]{(y/x)^2}$.)

Самостоятельная работа

Найти производные данных функций.

1. а) $y=x^3\ \ln^2(\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x)$; б) $y=(\operatorname{tg} 3x)^{x^4}$;
в) $e^{x^2y^2}-x^4+y^4=5$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } y'=\dfrac{e^{x^2y^2}\cdot 2xy-4x^3}{4y^3-e^{x^2y^2}\cdot 2yx^2}.\right)$

2. а) $y=\operatorname{ctg}^2 3x\cdot e^{-\cos^2 3x}$; б) $y=(1+x^4)^{\operatorname{tg} 7x}$;
в) $y^2+x^2-\sin(x^2y^2)=5$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } y'=\dfrac{2xy^2\cos(x^2y^2)-2x}{2y-2yx^2\cos(x^2y^2)}.\right)$

3. а) $y=e^{-x^2}\operatorname{arctg}\sqrt{x^3-1}$; б) $y=(\operatorname{ctg} 5x)^{x^3-1}$;
в) $2^x+2^y=2^{x+y}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } y'=-\dfrac{2^x-2^{x+y}}{2^y-2^{x+y}}.\right)$

6.3. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Производной второго порядка или *второй производной функции* $y=f(x)$ называется производная от ее первой производной, т. е. $(y')'$.

Обозначается вторая производная одним из следующих символов: y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. Если $s=s(t)$ — закон прямолинейного движения материальной точки, то $s'=\frac{ds}{dt}$ — скорость, а $s''=\frac{d^2s}{dt^2}$ — ускорение этой точки.

Если зависимость функции y от аргумента x задана в параметрическом виде уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, то:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)\frac{1}{x'}, \tag{6.3}$$

где штрих обозначает производную по t.

Производной n-го порядка функции $y=f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка данной функции. Для n-й производной употребляются следующие обозначения: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$. Таким образом,

$$y^{(n)}=(y^{(n-1)})'=\frac{dy^{(n-1)}}{dx}.$$

Пример 1. Найти производную второго порядка функции $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$.

▶ Имеем:

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$y''=-\frac{1}{2}(x^2+a^2)^{-3/2}\cdot 2x=-\frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}.$$ ◀

Пример 2. Вычислить значения первой и второй производных функции $y=(2x-1)^4$ в точках $x_1=1$, $x_2=-1$.

▶ Находим первую производную: $y'=8(2x-1)^3$. При $x=1$ имеем $y'(1)=8$, а при $x=-1$ $y'(-1)=-216$.

Далее, $y''=48(2x-1)^2$, $y''(1)=48$, $y''(-1)=432$. ◀

Пример 3. Найти производную n-го порядка функции $y=\sin x$.

▶ Дифференцируя последовательно n раз данную функцию, находим:

$$y'=\cos x=\sin(x+\pi/2),$$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)}=\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$ ◀

Пример 4. Найти вторую производную функции, заданной параметрическими уравнениями: $x=\ln t$, $y=t^3+2t+1$.

▶ В соответствии с формулами (6.3) имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2+2}{1/t} = 3t^3+2t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9t^2+2}{1/t} = 9t^3+2t. ◀$$

АЗ-6.4

1. Найти вторую производную функции $y=(1+4x^2)\operatorname{arctg} 2x$.

2. Найти значения производных любого порядка функции $y=x^3-5x^2+7x-2$ в точке $x=2$.

3. Дано уравнение движения точки по оси Ox: $x=100-5t-0{,}001t^3$ (x измеряется в метрах, t — в секундах). Найти скорость v и ускорение w этой точки в моменты времени $t_0=0$, $t_1=1$, $t_2=10$ с. (*Ответ*: $v=5$; 4,997; 4,7 м/с, $w=0$; $-0{,}006$; $-0{,}06$ м/с^2.)

4. Найти вторые производные функций, заданных уравнениями:

а) $\begin{cases} y=t^3+t^2-1, \\ x=t^2+t+1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=2\sin^3 t, \\ x=2\cos^3 t. \end{cases}$

5. Вычислить значение второй производной функции y, заданной уравнением x^4-xy+y^4-1, в точке $M(0, 1)$. (*Ответ*: $-1/16$.)

6. Записать уравнения касательной и нормали в точке $M_0(2, 2)$ к кривой $x=\frac{1+t}{t^3}$, $y=\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{2t}$. (*Ответ*: $7x-10y+6=0$, $10x+7y-34=0$.)

7. Показать, что функция $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ при любых постоянных C_1 и C_2 удовлетворяет уравнению $y''-5y'+6y=0$.

Самостоятельная работа

1. 1) Найти производную второго порядка функции $y=(x^2+1)\cdot\ln(1+x^2)$;

2) найти вторую производную функции, заданной уравнениями: $y=t^3+t$, $x=t^2-2t$;

3) вычислить значение второй производной функции y, заданной уравнением $e^y+y-x=0$, в точке $M_1(1, 0)$. (*Ответ*: $-1/8$.)

2. 1) Найти производную второго порядка функции $y=e^{-3x}\cdot(\cos 2x+\sin 2x)$;

2) найти производную второго порядка функции, заданной уравнениями: $y=t^3+t^2+1$, $x=1/t$;

3) вычислить значение второй производной функции y, заданной уравнением $x^3+y^3-xy=1$, в точке $M_1(1, 1)$. (*Ответ*: -7.)

3. 1) Найти вторую производную функции $y=\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x$;

2) найти производную второго порядка функции, заданной уравнениями: $y=(2t+1)\cos t$, $x=\ln t$;

3) вычислить значение второй производной функции y, заданной уравнением $x^2+2y^2-xy+x+y=4$, в точке $M_1(1, 1)$. (*Ответ*: -1.)

6.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПЕРВОГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Дифференциалом первого порядка функции $y=f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейно зависящая от приращения $\Delta x=dx$ независимой переменной x. Дифференцяал dy функцни равен произведеиню ее производной и дифференциала независимой переменной:

$$dy=y'dx=f'(x)dx,$$

поэтому справедливо равенство

$$y'=\frac{dy}{dx}.$$

Из рис. 6.2 видно, что если MN — дуга графика функции $y=f(x)$, MT — касательная, проведенная к нему в точке $M(x, y)$, и $AB=\Delta x=dx$, то $CT=dy$, а отрезок $CN=\Delta y$. Дифференциал функцин dy отличается от ее приращения Δy на бесконечно малую высшего порядка по срав-

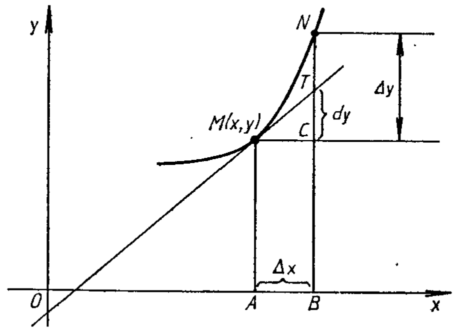


Рис. 6.2

нению с Δx. Непосредственно из определения дифференциала и правил нахождения производных имеем ($u = u(x)$, $v = v(x)$):

1) $dC = 0$ ($C = \text{const}$);
2) $dx = \Delta x$, если x — независимая переменная;
3) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
4) $d(uv) = vdu + udv$;
5) $d(Cu) = Cdu$;
6) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ $(v \neq 0)$;
7) $df(u) = f'_u(u)u'dx = f'(u)du$.

Пример 1. Найти дифференциал функции $y = \sin^5 3x$.

▶ Находим производную данной функции:

$$y' = 5\sin^4 3x \cdot \cos 3x \cdot 3,$$

тогда

$$dy = 15\sin^4 3x \cdot \cos 3x dx. ◀$$

Дифференциалом n-го порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка этой функции, т. е.

$$d^n y = d(d^{n-1} y).$$

Если дана функция $y = f(x)$, где x — независимая переменная, то

$$d^2 y = y'' dx^2, \; d^3 y = y''' dx^3, \; ..., \; d^n y = y^{(n)} dx^n.$$

Если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то

$$d^2 y = y''(du)^2 + y' d^2 u,$$

где дифференцирование функции y выполняется по переменной u. (Это имеет место и для дифференциалов более высоких порядков.)

Пример 2. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \ln(1 + x^2)$.

▶ Имеем:

$$y' = 2x/(1 + x^2), \; y'' = (2(1 + x^2) - 4x^2)/(1 + x^2)^2 = 2(1 - x^2)/(1 + x^2)^2.$$

Тогда

$$d^2 y = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} dx^2. ◀$$

Так как дифференциал функции отличается от ее приращения на бесконечно малую высшего порядка по сравнению с величиной dx, то $\Delta y \approx dy$, или $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)dx$, откуда

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx.$$

Полученная формула часто применяется для приближенного вычисления значений функции при малом приращении Δx независимой переменной x.

Пример 3. Вычислить приращение стороны куба, если известно, что его объем увеличился от 27 до 27,1 м^3.

▶ Если x — объем куба, то его сторона $y = \sqrt[3]{x}$. По условию задачи $x = 27$, $\Delta x = 0{,}1$. Тогда приращение стороны куба

$$\Delta y \approx dy = y'(x)\Delta x = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} \cdot 0{,}1 = \frac{0{,}1}{27} \approx 0{,}0037 \text{ м. } ◀$$

Пример 4. Найти приближенно $\sin 31°$.

▶ Полагаем $x = \pi/6$, тогда

$$\Delta x = 1° \cdot \frac{\pi}{180°} = 0{,}017,$$

$$\sin 31° \approx \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot 0{,}017 = 0{,}5 + 0{,}017 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}515. \blacktriangleleft$$

С помощью дифференциала функции вычисляют абсолютную погрешность функции ε_y, если известна абсолютная погрешность ε_x аргумента. В практических задачах значения аргумента находятся с помощью измерений, и его абсолютная погрешность считается известной.

Пусть требуется вычислить значение функция $y = f(x)$ при некотором значении аргумента x, истинная величина которого нам неизвестна, но дано его приближенное значение x_0 с абсолютной погрешностью ε_x: $x = x_0 + dx$, $|dx| \leqslant \varepsilon_x$. Тогда

$$|f(x) - f(x_0)| \approx |f'(x_0)|\,|dx| < |f'(x_0)|\,\varepsilon_x.$$

Отсюда видно, что $\varepsilon_y = |f'(x_0)|\,\varepsilon_x$.

Относительная погрешность функции δ_y выражается формулой

$$\delta_y = \frac{\varepsilon_y}{|f(x_0)|} = \left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right|\varepsilon_x = |(\ln f(x_0))'|\,\varepsilon_x.$$

Например, если в примере 4 принять $\varepsilon_x = 0{,}017$, то

$$\varepsilon_y = \left|\cos\frac{\pi}{6}\right| \cdot 0{,}017 = 0{,}015,$$

$$\delta_y = \frac{0{,}015}{0{,}5} \cdot 100\ \% = 3\ \%.$$

АЗ-6.5

1. Даны функция $y = x^3 - 2x^2 + 2$ и точка $x_0 = 1$. Для любого приращения независимой переменной Δx выделить главную часть приращения функции. Оценить абсолютную величину разности между приращением функции и ее дифференциалом в данной точке, если: а) $\Delta x = 0{,}1$; б) $\Delta x = 0{,}01$. Сравнить эту разность с абсолютной величиной дифференциала функции. (*Ответ*: а) $\varepsilon = |\Delta y - dy| = 0{,}011$, $\varepsilon/|dy| \cdot 100\ \% = 11\ \%$; б) $\varepsilon = 0{,}000101$, $\varepsilon/|dy| \times 100\ \% = 1{,}01\ \%$.)

2. Найти дифференциалы первого порядка следующих функций:

а) $y = x\,\mathrm{tg}^3 x$; б) $y = \sqrt{\mathrm{arctg}\, x} + (\arcsin x)^2$;

в) $y = \ln(x + \sqrt{4 + x^2})$.

3. Найти дифференциал второго порядка функции $y = e^{-x^3}$.

4. Найти дифференциалы третьего порядка функций:

а) $y = \sin^2 2x$; б) $y = \frac{\ln x}{x}$.

5. Найти приближенное значение функции $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ при $x = 1{,}03$ с точностью до двух знаков после запятой. (*Ответ*: 5,00.)

6. Найти приближенное значение $\sqrt[4]{17}$ с точностью до двух знаков после запятой. (*Ответ*: 2,03.)

Самостоятельная работа

1. 1) Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции $y = x^3 \ln x$;

2) найти приближенное значение функции $y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$ при $x = 0{,}1$ с точностью до двух знаков после запятой. (*Ответ*: 1,03.)

2. 1) Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $y = (x^2 + 1)\operatorname{arctg} x$;

2) вычислить приближенное значение функции $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ при $x = 0{,}98$ с точностью до двух знаков после запятой. (*Ответ*: 2,09.)

3. 1) Найти дифференциалы второго и третьего порядков функции $y = e^{-3x} \cos 2x$;

2) вычислить приближенное значение функции $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 12}$ при $x = 1{,}3$ с точностью до двух знаков после запятой. (*Ответ*: 2,08.)

6.5. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ — БЕРНУЛЛИ

Теорема 1 (Ролля). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема внутри этого отрезка и $f(a) = f(b)$, то существует по крайней мере одна точка $x = c$ $(a < c < b)$, такая, что $f'(c) = 0$.*

Теорема 2 (Лагранжа). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема внутри этого отрезка, то существует по крайней мере одна точка $x = c$ $(a < c < b)$, такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Эта формула называется *формулой Лагранжа конечных приращений.*

Теорема 3 (Коши). *Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы внутри него, причем $\varphi'(x) \neq 0$ нигде при $a < x < b$, то найдется хотя бы одна точка $x = c$ $(a < c < b)$, такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Правило Лопиталя $\left(\text{для раскрытия неопределенностей вида } \frac{0}{0}\right.$ и $\left.\frac{\infty}{\infty}\right)$. *Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши в некоторой окрестности точки $x = x_0$, стремятся к нулю (или $\pm\infty$) при $x \to x_0$ и существует $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует также $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и эти пределы равны, т. е.*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Правило Лопиталя справедливо и при $x_0 = \pm\infty$.

Если частное $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ вновь дает в предельной точке неопределенность одного из двух названных видов и функции $f'(x)$, $\varphi'(x)$ удовлетворяют всем требованиям, ранее указанным для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, то можно перейти к отношению вторых производных и т. д. Однако следует помнить, что предел отношения самих функций может существовать, в то время как отношение производных не стремится ни к какому пределу.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x}$.

▶ Имеем:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\sin x/x}{1+\cos x/x} = 1.$$

Но предел вида

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+\sin x)'}{(x+\cos x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1-\sin x}$$

не существует, так как при $x\to\infty$ числитель и знаменатель дроби могут принимать любые значения из отрезка $[0; 2]$, а само отношение производных принимает любые неотрицательные значения. Следовательно, правило Лопиталя в этом случае неприменимо. ◀

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin 5x}$.

▶ Числитель и знаменатель данной дроби непрерывны, дифференцируемы и стремятся к нулю. Это означает, что можно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x}}{5\cos 5x} = \frac{3}{5}. \blacktriangleleft$$

Неопределенность вида $0\cdot\infty$ получается из произведения функций $f_1(x)f_2(x)$, в котором $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = \infty$. Это произведение легко преобразуется в частное вида $\frac{f_1(x)}{1/f_2(x)}$ или $\frac{f_2(x)}{1/f_1(x)}$, что дает неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Если же $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = \infty$, то разность $f_1(x) - f_2(x)$ дает неопределенность вида $\infty - \infty$. Но

$$f_1(x) - f_2(x) = f_1(x)\left(1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right);$$

Тогда, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}=1$, приходим к неопределенности вида $0\cdot\infty$.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} x^3e^{-x}$ (неопределенность вида $0\cdot\infty$).

▶ Легко находим, что

$$\lim_{x\to\infty} x^3e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=0. \blacktriangleleft$$

Рассмотрим функцию вида $f(x)^{\varphi(x)}$.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, то имеем неопределенность вида 0^0.

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, приходим к неопределенности вида 1^∞.

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, получаем неопределенность вида ∞^0.

Для раскрытия этих неопределенностей применяется метод логарифмирования, который состоит в следующем. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{\varphi(x)}=A$. Так как логарифмическая функция непрерывна, то

$$\lim_{x\to x_0}\ln y=\ln\lim_{x\to x_0} y.$$

Тогда

$$\ln A=\lim_{x\to x_0}(\varphi(x)\ln f(x))$$

и неопределенности трех рассматриваемых видов сводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$.

▶ Обозначим искомый предел через A. Тогда

$$\ln A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln(e^x+x)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+1)/(e^x+x)}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x}=2,\ A=e^2. \blacktriangleleft$$

АЗ-6.6

1. Показать, что функция $f(x)=x-x^3$ на отрезках $[-1;\ 0]$ и $[0;\ 1]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, и найти соответствующие значения c. (*Ответ*: $c=\pm 1/\sqrt{3}$.)

2. На дуге параболы $y=x^2$, заключенной между точками $A(1,\ 1)$ и $B(3,\ 9)$, найти точку, касательная в которой параллельна хорде AB. (*Ответ*: $(2,\ 4)$.)

3. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-7x^2+4x+2}{x^3-5x+4}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-1}{\operatorname{tg} 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\pi x/(2a)}$;

е) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(2/x+1)^x$.

(*Ответ*: а) $7/2$; б) $-1/3$; в) $7/3$; г) $1/2$; д) $e^{2/\pi}$; е) 1; ж) e^2.)

Самостоятельная работа

Найти указанные пределы.

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{x\sin 7x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}$.

(*Ответ*: а) $7/2$; б) e^{-2}.)

2. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\operatorname{ctg}(\pi x/4)}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

(*Ответ*: а) $-\pi/4$; б) 1.)

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{3}{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}x^{1/(1-x)}$.

(*Ответ*: а) 3; б) e^{-1}.)

6.6. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ И ИХ ГРАФИКОВ

Одной из важнейших прикладных задач дифференциального исчисления является разработка общих приемов исследования поведения функций.

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* в некотором интервале, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее (меньшее) значение функции, т. е. при $x_1<x_2$ выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$).

Перечислим *признаки возрастания (убывания) функции*.

1. Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ возрастает (убывает), то ее производная на этом отрезке неотрицательна (неположительна), т. е. $f'(x)\geqslant 0$ ($f'(x)\leqslant 0$).

2. Если непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ и дифференцируемая внутри него функция имеет положительную (отрицательную) производную, то она возрастает (убывает) на этом отрезке.

Функция $y=f(x)$ называется *неубывающей (невозрастающей)* в некотором интервале, если для любых $x_1<x_2$ из этого интервала $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ ($f(x_1)\geqslant f(x_2)$).

Интервалы, в которых функция не убывает или не возрастает, называются *интервалами монотонности функции*. Характер монотонности функции может изменяться только в тех точках ее области определения, в которых меняется знак первой производной. Точки, в которых первая производная функции обращается в нуль или терпит разрыв, называются *критическими*.

Пример 1. Найти интервалы монотонности и критические точки функции $y=2x^2-\ln x$.

▶ Данная функция определена при $x>0$. Находим ее производную:

$$y'=4x-1/x=(4x^2-1)/x.$$

В области определеиия функции $y' = 0$ прн $4x^2 - 1 = 0$, т. е. при $x_0 = 1/2$. Найдениая точка разбивает область определеиия функции на интервалы $(0;\ 1/2)$ и $(1/2;\ +\infty)$; в первом из них $y' < 0$, а во втором $y' > 0$. Это озиачает, что в интервале $(0;\ 0{,}5)$ даниая функция убывает, а в интервале $(0{,}5;\ +\infty)$ — возрастает. ◀

Точка x_1 называется *точкой локального максимума функции* $y = f(x)$, если для любых достаточно малых $|\Delta x| \neq 0$ выполняется неравеиство $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$. Точка x_2 называется *точкой локального минимума функции* $y = f(x)$, если для любых достаточно малых $|\Delta x| \neq 0$ справедливо иеравенство $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$. Точки максимума и миниимума называют *точками экстремума функции*, а максимумы и мнинимумы функции — ее *экстремальными значениями.*

Теорема 1 (необходимый признак локального экстремума). *Если функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ экстремум, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.*

В точках экстремума дифференцируемой функции касательиая к ее графику параллельиа оси Ox.

Пример 2. Исследовать иа экстремум фуикцию $y = (x+1)^3$.

▶ Производная данной фуикции $y' = 3(x+1)^2$ в точке $x = -1$ равна нулю. Но в этой точке функция экстремума не имеет, так как $(x+1)^3 > 0$ при $x > -1$, $(x+1)^3 < 0$ при $x < -1$, $(x+1)^3 = 0$ при $x = -1$. Итак, обращеиие в иуль производной функции не обеспечивает существоваиия экстремума функции. ◀

Пример 3. Исследовать иа экстремум фуикцию $y = |x|$.

▶ Для даиной иепрерывиой функции имеем: $y(0) = 0$. Так как при $x \neq 0$ $y = |x| > 0$, то $x = 0$ — точка миинмума. Но, как было показано в примере 2 из § 6.1, фуикция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$. ◀

Из рассмотрениых примеров следует, что не во всякой критнческой точке фуикция имеет экстремум. Однако если в какой-либо точке фуикция достигает экстремума, то эта точка всегда является критнческой.

Для отыскаиия экстремумов функции поступают следующим образом: находят все крнтические точки, а затем исследуют каждую нз иих (в отдельности) с целью выяснения, будет ли в этой точке максимум или минимум, или же экстремума в ней нет.

Теорема 2 (первый достаточный признак локального экстремума). *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку $x = x_0$, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0). Если $f'(x)$ при $x < x_0$ положительна, а при $x > x_0$ отрицательна, то при $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет максимум. Если же $f'(x)$ при $x < x_0$ отрицательна, а при $x > x_0$ положительна, то при $x = x_0$ данная функция имеет минимум.*

Следует нметь в виду, что указанные неравенства должиы выполияться в достаточно малой окрестностн крнтнческой точки $x = x_0$. Схема исследования функции $y = f(x)$ на экстремум с помощью первой производной может быть записана в виде таблицы (см. табл. 6.1).

Пример 4. Исследовать на экстремум фуикцию $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$.

▶ Данная функция определена и непрерывна для всех $x \in \mathbf{R}$. Находим ее производную:

$$y' = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x} + 1\right).$$

Критнческими точкамн данной функцин будут $x_1 = -1$, в которой $y' = 0$, н $x_2 = 0$, в которой производная y' терпит разрыв. Эти точки

Таблица 6.1

Знаки $f'(x)$ при переходе через критическую точку x_0			Характер критической точки
$x<x_0$	$x=x_0$	$x>x_0$	
$+$	$f'(x_0)=0$ или не существует	$-$	Точка максимума
$-$	»	$+$	Точка минимума
$+$	»	$+$	Экстремума нет (функция возрастает)
$-$	»	$-$	Экстремума иет (фуикция убывает)

разбивают область определеиия функции на интервалы: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; +\infty)$, в каждом из которых производная фуикции сохраняет знак. Поэтому достаточио определить знак производной в произвольной точке каждого из интервалов. Имеем: $y'(-8)=1>0$, т. е. в интервале $(-\infty; -1)$ функция возрастает; $y'(-1/8)=-2<0$, следовательно, в интервале $(-1; 0)$ функция убывает; $y'(1)=3>0$, т. е. в интервале $(0; +\infty)$ функция возрастает. Значит, при переходе через точку $x_1=-1$ в направлеиии возрастания x зиак первой производной изменяется с «$+$» на «$-$», т. е. точка $x_1=-1$ является точкой локального максимума и $y_{\max}=$ $=y(-1)=1$. Для точки $x_2=0$ знак первой производной меняется с «$-$» иа «$+$», а это означает, что точка $x_2=0$ является точкой локального минимума и $y_{\min}=y(0)=0$ (рис. 6.3). ◀

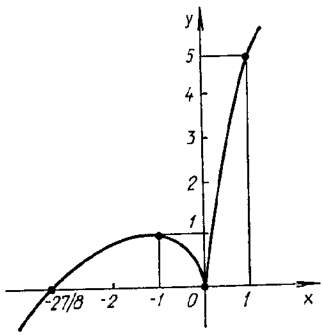


Рис. 6.3

Теорема 3 (второй достаточный признак локального экстремума функции). *Пусть функция $y=f(x)$ дважды дифференцируема и $f'(x_0)=0$. Тогда в точке $x=x_0$ функция имеет локальный максимум, если $f''(x_0)<0$, и локальный минимум, если $f''(x_0)>0$.*

В случае, когда $f''(x_0)=0$, точка $x=x_0$ может и не быть экстремальной.

Пример 5. С помощью второй производной исследовать на экстремум функцию $y=x^2e^{-x}$.

▶ Находим первую и вторую производные:

$$y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x},$$
$$y''=(2-2x)e^{-x}-(2x-x^2)e^{-x}=(x^2-4x+2)e^{-x}.$$

Так как производная непрерывна при $x\in\mathbf{R}$, то критические точки данной функции удовлетворяют уравненню $2x-x^2=0$, откуда $x_1=0$ и $x_2=2$. Вычисляем значения второй производной в этих точках: $y''(0)=2>0$, т. е. $x_1=0$ — точка миимума; $y''(2)=-2e^{-2}<0$, т. е. $x_2=2$ — точка максимума; $y_{\min}=0$, $y_{\max}=4e^{-2}$ ◀

На отрезке $[a;\ b]$ функция $y=f(x)$ может достигать *наименьшего* ($y_{\text{наим}}$) или *наибольшего* ($y_{\text{наиб}}$) *значения* либо в критических точках функции, лежащих в интервале $(a;\ b)$, либо на концах отрезка $[a;\ b]$.

Пример 6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^3-3x+3$ на отрезке $[-2;\ 3]$.

▶ Производная данной функции $y'=3x^2-3$. Тогда $y'=0$ при $x_1=-1$ и $x_2=1$. Обе эти критические точки принадлежат интервалу $(-2;\ 3)$. Вычисляем значения функции в критических точках и на концах отрезка: $y(-1)=5$, $y(1)=1$, $y(-2)=1$, $y(3)=21$. Сравнивая полученные числа, заключаем, что наименьшее значение на отрезке $[-2;\ 3]$ функция принимает в точках $x_2=1$ и $x=a=-2$, а наибольшее значение — в точке $x=b=3$. Итак, на отрезке $[-2;\ 3]$ $y_{\text{наим}}=1$, а $y_{\text{наиб}}=$ $=21$. ◀

Кривая, заданная функцией $y=f(x)$, называется *выпуклой* в интервале $(a;\ b)$, если все точки кривой лежат не выше любой ее касательной в этом интервале, и *вогнутой* в интервале $(a;\ b)$, если все ее точки лежат не ниже любой ее касательной в этом интервале.

Точка кривой $M(x_0,\ f(x_0))$, отделяющая выпуклую ее часть от вогнутой, называется *точкой перегиба кривой*. Предполагается, что в точке M существует касательная.

Теорема 4 (достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции). *Если во всех точках интервала $(a;\ b)$ вторая производная функции $y=f(x)$ отрицательна (положительна), т. е. $f''(x)<0$ ($f''(x)>$ >0), то кривая $y=f(x)$ в этом интервале выпукла (вогнута).*

В точке перегиба, отделяющей промежуток выпуклости от промежутка вогнутости, вторая производная функции изменяет свой знак, поэтому в таких точках вторая производная функции или обращается в нуль, или не существует.

Теорема 5 (достаточный признак точки перегиба). *Если в точке $x=x_0$ $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует и при переходе через эту точку производная $f''(x)$ меняет знак, то точка с абсциссой $x=x_0$ кривой $y=$ $=f(x)$ — точка перегиба.*

Пример 7. Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y=e^{-x^2/2}$ *(кривая Гаусса).*

▶ Находим первую и вторую производные:

$$y'=-xe^{-x^2/2},\quad y''=e^{-x^2/2}(x^2-1).$$

Первая и вторая производные существуют при любых $x\in\mathbf{R}$. Приравнивая y'' нулю, находим: $x_1=-1$, $x_2=1$. Легко заметить, что в окрестности точки $x_1=-1$ знак второй производной меняется по следующему закону: $y''>0$ при $x<-1$, $y''<0$ при $x>-1$. Значит, $M_1(-1,\ e^{-1/2})$ является точкой перегиба. Слева от этой точки кривая вогнута, так как в интервале $(-\infty;\ -1)$ $y''>0$, а справа в интервале $(-1;\ 1)$ — выпукла, так как в этом интервале $y''<0$.

Далее, $y''>0$ при $x>1$. Следовательно, при $x_2=1$ на кривой имеем также точку перегиба $M_2(1,\ e^{-1/2})$. Слева от точки M_2 в интервале $(-1;\ 1)$ кривая выпукла, а справа в $(1;\ +\infty)$ вогнута. Схематический график данной функции изображен на рис. 6.4. ◀

Прямая L называется *асимптотой* данной *кривой* $y=f(x)$, если расстояние от точки M кривой до прямой L при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю. Из определения следует, что асимптоты могут существовать только у кривых, имеющих сколь угодно далекие точки («неограниченные» кривые). В примере 7 кривая Гаусса имеет асимптоту $y=0$ (см. рис. 6.4).

Если существуют числа $x=x_i$ $(i=\overline{1,\ n})$, при которых $\lim\limits_{x\to x_i}f(x)=$

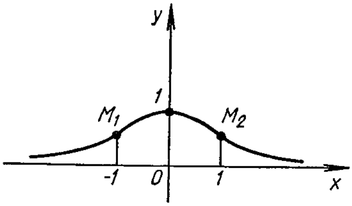


Рис. 6.4

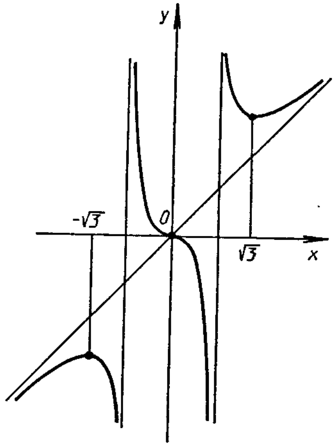


Рис. 6.5

$= \pm\infty$, т. е. функция имеет бесконечные разрывы, то прямые $x = x_i$ называются вертикальными асимптотами кривой $y = f(x)$.

Если существуют пределы

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx),$$

то прямые $y = kx + b$ — *наклонные асимптоты кривой* $y = f(x)$ (при $k = 0$ — *горизонтальные*). При $x \to \pm\infty$ можем прийти к двум значениям для k. Если имеем одно зиачение для k, то при $x \to \pm\infty$ можем получить два значения для b.

Пример 8. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

▶ Так как $\lim\limits_{x \to \pm 1} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = \pm\infty$, то данная кривая имеет две вертикальные асимптоты $x = \pm 1$. Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0.$$

Таким образом, у даииой кривой существует одна наклонная асимптота, уравнение которой $y = x$ (рис. 6.5).

АЗ-6.7

1. Найти интервалы монотонности функции $y = x^4 - 2x^2 - 5$. (*Ответ*: убывает в $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$, возрастает в $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$.)

2. Найти интервалы монотонности функции $y = x/(x^2 - 6x - 16)$. (*Ответ*: убывает в $(-\infty; -2)$, $(-2; 8)$, $(8; +\infty)$.)

3. Исследовать на экстремум функцию $y = \sqrt[3]{(x^2-6x+5)^2}$. (*Ответ*: $y_{\min}=0$ при $x=1$ и $x=5$, $y_{\max}=2\sqrt[3]{2}$ при $x=3$.)

4. Исследовать на экстремум функцию $y=x-\ln(1+x)$. (*Ответ*: $y_{\min}=0$ при $x=0$.)

5. Исследовать на экстремум функцию $y=x\ln^2 x$. (*Ответ*: $y_{\max}=4/e^2$ при $x=e^{-2}$, $y_{\min}=0$ при $x=1$.)

6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=2x^3+3x^2-12x+1$ на отрезке $[-1;\ 5]$. (*Ответ*: $y_{\text{наим}}=-6$ при $x=1$, $y_{\text{наиб}}=266$ при $x=5$.)

7. Найти точки перегиба, интервалы вогнутости и выпуклости графика функции $y=\ln(1+x^2)$. (*Ответ*: $M_1(1,\ \ln 2)$, $M_2(-1,\ \ln 2)$.)

8. Найти асимптоты графика функции $y=x^2/\sqrt{x^2-1}$. (*Ответ*: $x=\pm 1$, $y=\pm x$.)

Самостоятельная работа

1. 1) Исследовать на экстремум функцию $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$;

2) найти асимптоты кривой $y=x^3/(2(x+1)^2)$.

(*Ответ*: 1) $y_{\min}=0$ при $x=\pm 1$, $y_{\max}=1$ при $x=0$; 2) $x=-1$, $y=\frac{1}{2}x+1$.)

2. 1) Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y=\operatorname{arctg} x - x$;

2) найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=x+3\sqrt[3]{x}$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

(*Ответ*: 1) $O(0,\ 0)$, $(-\infty;\ 0)$ — выпуклая, $(0;\ +\infty)$ — вогнутая; 2) $y_{\text{наим}}=-4$, $y_{\text{наиб}}=4$.)

3. 1) Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y=x^3-3x^2-9x+7$;

2) доказать справедливость неравенства $x>\ln(1+x)$ при $x>0$. (*Ответ*: 1) $y_{\max}=12$ при $x=-1$, $y_{\min}=-20$ при $x=3$.)

6.7. СХЕМА ПОЛНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

Для полного исследования функции и построения ее графика можно рекомендовать следующую примерную схему:

1) указать область определения функции;

2) найти точки разрыва функции, точки пересечения ее графика

с осями координат и вертикальные асимптоты (если они существуют);

3) установить наличие или отсутствие четности, нечетности, периодичности функции;

4) исследовать функцию на монотонность и экстремум;

5) определить интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба;

6) найти асимптоты графика функции;

7) произвести необходимые дополнительные вычисления;

8) построить график функции.

Пример. Провести полное исследование функции $y=\sqrt[3]{(x+3)x^2}$ и построить ее график.

▶ Воспользуемся рекомендуемой схемой.

1. Данная функция определена для всех $x \in \mathbf{R}$.

2. Функция не имеет точек разрыва и пересекает ось Ox при $x = -3$ и $x=0$, а ось Oy — при $y=0$.

3. Функция не является четной, нечетной, периодической.

4. Находим производную функции:

$$f'(x)=\frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}};$$

$f'(x)=0$ при $x_1=-2$ и не существует в точках $x_2=-3$, $x_3=0$. Эти точки разбивают всю область определения функции на интервалы $(-\infty;\ -3)$, $(-3;\ -2)$, $(-2;\ 0)$, $(0;\ +\infty)$. Внутри каждого из полученных интервалов сохраняется знак производной, а именно: $f'(x)>0$ в интервалах $(-\infty;\ -3)$, $(-3;\ -2)$, $(0;\ +\infty)$ и $f'(x)<0$ в $(-2;\ 0)$. Это означает, что функция возрастает в интервале $(-\infty;\ -2)$, убывает в интервале $(-2;\ 0)$ и возрастает в интервале $(0;\ +\infty)$. Так как в окрестности точки $x_1=-2$ знак первой производной при увеличении x изменяется с «+» на «—», то $x_1=-2$ является точкой максимума, $y_{\max}=\sqrt[3]{4}$. Для точки $x_3=0$ знак первой производной изменяется с «—» на «+», т. е. $x_3=0$ — точка минимума, $y_{\min}=y(0)=0$. В точке $x_2=-3$ функция не имеет экстремума, так как в ее окрестности $f'(x)$ не меняет знака.

5. Находим вторую производную:

$$f''(x)=-\frac{2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}},$$

которая не равна нулю для любого конечного x. Поэтому точками перегиба могут быть только те точки кривой, в которых вторая производная не существует, т. е. $x_2=-3$ и $x_3=0$. Определим знак y'' в каждом из интервалов, на которые найденные точки разбивают область определения функции: $f''(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ -3)$, кривая вогнута; $f''(x)<0$ при $x\in(-3;\ 0)$, кривая выпукла; $f''(x)<0$ при $x\in(0;\ +\infty)$, кривая выпукла. Так как в окрестности точки $x_2=-3$ вторая производная меняет знак, то $M(-3;\ 0)$ является точкой перегиба. Точка $x_3=0$ не является точкой перегиба, так как в ее окрестности знак $f''(x)$ не меняется.

6. Вертикальных асимптот нет, так как данная функция не имеет бесконечных разрывов. График функции имеет наклонную асимптоту $y=kx+b$, если существуют пределы для k и b, указанные в правиле нахождения наклонной асимптоты. Вычислим их для данной функции:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{(x+3)x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{(x+3)x^2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{(x+3)x^2}-x\right)\left(\sqrt[3]{(x+3)^2x^4}+x\sqrt[3]{(x+3)x^2}+x^2\right)}{\sqrt[3]{(x+3)^2x^4}+x\sqrt[3]{(x+3)x^2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+3)x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x+3)^2x^4}+x\sqrt[3]{(x+3)x^2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{\sqrt{(x+3)^2x^4}+x\sqrt[3]{(x+3)x^2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{1+6/x+9/x^2}+\sqrt[3]{1+3/x}+1}=1.$$

Получили уравнение наклонной асимптоты $y=x+1$.

7. Прежде чем строить график функции, целесообразно установить угол α, под которым кривая пересекает ось абсцисс в точках $x_2=-3$ и $x_3=0$. В этих точках $y'=\operatorname{tg}\alpha=\infty$ и $\alpha=\pi/2$. Так как в точке $x_3=0$ функция достигает нулевого минимума, то ее график не расположен ниже оси Ox в окрестности этой точки. Точка $x_3=0$ является *точкой возврата* графика функции.

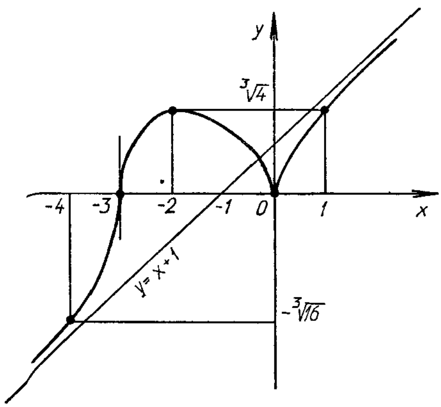


Рис. 6.6

8. По результатам исследования строим график функцни (рис. 6.6). ◀

АЗ-6.8

Провести полное исследование указанных функций и построить их графики.

1. $y=x^3-3x^2$. (*Ответ*: $y_{\max}=0$ при $x=0$; $y_{\min}=-4$ при $x=2$; точка перегиба $M_1(1,\ -2)$.)

2. $y = x^2 + 2/x$. (*Ответ*: $y_{\min} = 3$ при $x = 1$; точка перегиба $M_1(-\sqrt[3]{2}, 0)$; асимптота $x = 0$.)

3. $y = x^3/(3 - x^2)$. (*Ответ*: точки разрыва $x = \pm\sqrt{3}$; $y_{\min} = 4{,}5$ при $x = -3$; $y_{\max} = -4{,}5$ при $x = 3$; точка перегиба $M_1(0, 0)$; асимптоты $x = \pm\sqrt{3}$ и $y = -x$.)

Самостоятельная работа

Провести полное исследование данных функций и построить их графики.

1. $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$. (*Ответ*: $y_{\min} = 0$ при $x = -1$; точки перегиба $M_1(-2, \ln 2)$ и $M_2(0, \ln 2)$.)

2. $y = (2x - 1)/(x - 1)^2$. (*Ответ*: $y_{\min} = -1$ при $x = 0$; точка перегиба $M_1(-1/2, -8/9)$; асимптоты $x = 1$ и $y = 0$.)

3. $y = -\ln(x^2 - 4x + 5)$. (*Ответ*: $y_{\max} = 0$ при $x = 2$; точки перегиба $M_1(1, \ln 2)$, $M_2(3, \ln 2)$.)

6.8. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ

Пример 1. Каковы должны быть размеры (радиус основания R и высота H) открытого сверху цилиндрического бака максимальной вместимостью, если для его изготовления отпущено $S = 27\pi \approx 84{,}82$ м^2 материала?

▶ Вместимость бака $V = \pi R^2 H$, а на его изготовление пойдет материал площадью $S = \pi R^2 + 2\pi RH$. Отсюда определяем высоту бака

$$H = \frac{S - \pi R^2}{2\pi R}.$$

Тогда вместимость бака

$$V = \pi R^2 \frac{S - \pi R^2}{2\pi R} = \frac{SR - \pi R^3}{2} = V(R).$$

Найдем то значение R, при котором вместимость $V(R)$ будет максимальной (см. § 6.5). Имеем:

$$V' = \frac{1}{2}(S - 3\pi R^2), \; V' = 0,$$

$$S - 3\pi R^2 = 0, \; R = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} = \sqrt{\frac{27\pi}{3\pi}} = 3 \text{ м}.$$

Так как $V'' = -3\pi R < 0$, то при найденном значении $R = 3$ вместимость бака будет максимальной.

Высота бака находится из полученного выше соотношения:

$$H = \frac{S - \pi R^2}{2\pi R} = \frac{S - \pi \dfrac{S}{3\pi}}{2\pi\sqrt{S/(3\pi)}} = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} = 3 \text{ м}. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Сечение оросительного канала имеет форму равнобочной трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию (рис. 6.7). При каком угле наклона α боковых сторон этой трапеции сечение канала будет иметь наибольшую площадь?

▶ Определим площадь сечения канала как функцию угла α, считая, что боковые стороны и меньшее основание трапеции равны a. Тогда, как видно из рис. 6.7,

$$S = \frac{|AB| + |DC|}{2} \cdot |CE| = \frac{2a + 2a\cos\alpha}{2} a\sin\alpha =$$

$$= a^2\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right).$$

Исследуем S как функцию аргумента α на экстремум. Имеем:

$$S' = a^2(\cos\alpha + \cos 2\alpha).$$

В критических точках $S' = 0$, т. е.

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha = 0,\ 2\cos(3\alpha/2)\cdot\cos(\alpha/2) = 0.$$

Так как $0 < \alpha < \pi/2$, то $\cos(\alpha/2) \neq 0$. Поэтому, если $\cos(3\alpha/2) = 0$, то $3\alpha/2 = \pi/2$ или $\alpha = \pi/3$.

Докажем, что при $\alpha = \pi/3$ функция S достигает наибольшего значения на отрезке $[0;\ \pi/2]$. Действительно,

$$S'' = a^2(-\sin\alpha - 2\sin 2\alpha),\ S''\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= a^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right) = -a^2\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0.$$

Поэтому при $\alpha = \pi/3$ имеем локальный максимум $S(\pi/3) = S_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, который на отрезке $[0;\ \pi/2]$ будет также наибольшим значением функции S, поскольку $S(0) = 0$, $S(\pi/2) = a^2 < S_{\max}$. ◀

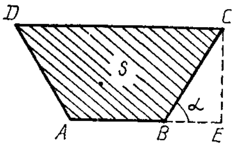


Рис. 6.7

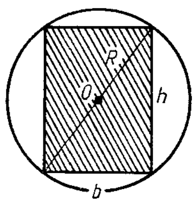


Рис. 6.8

Пример 3. Известно, что прочность бруса с прямоугольным поперечным сечением пропорциональна его ширине b и квадрату высоты h. Найти размеры бруса наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна радиусом $R = 2\sqrt{3}$ дм.

▶ Прочность бруса $N = kh^2b$, где k — коэффициент пропорциональности, $k > 0$. Из рис. 6.8 видно, что $h^2 + b^2 = 4R^2$, т. е. $h^2 = 4R^2 - x^2$. Тогда

$$N = k(4R^2 - b^2)b.$$

Найдем экстремум функции $N = N(b)$:

$$N' = k(4R^2 - 3b^2).$$

Если $N' = 0$, то $4R^2 - 3b^2 = 0$, откуда $b = 2R/\sqrt{3}$, $b = 4$ дм. Тогда

$$h = \sqrt{4R^2 - b^2} = \sqrt{4R^2 - 4R^2/3} = 2R\sqrt{2/3} = b\sqrt{2},$$

$$h = 4\sqrt{2} \text{ дм.}$$

Так как $N'' = -6kb < 0$, то при найденных значениях b и h прочность бруса будет максимальной. ◀

АЗ-6.9

1. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак вместимостью $V = 16\pi \approx 50$ м^3. Каковы должны быть размеры бака (радиус R и высота H), чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала? (*Ответ*: $R = 2$ м, $H = 4$ м.)

2. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R. (*Ответ*: $H = 4R/3$.)

3. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (*Ответ*: $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$.)

4. Вырезанный из круга сектор с центральным углом α свернут в коническую поверхность. При каком значении угла α объем полученного конуса будет наибольшим? (*Ответ*: $\alpha = 2\pi\sqrt{2/3} \approx 293°56'$.)

Самостоятельная работа

1. Через точку $M(1, 4)$ провести прямую так, чтобы сумма величин положительных отрезков, отсекаемых ею на осях координат, была наименьшей. Записать уравнение этой прямой. (*Ответ*: $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$.)

2. Найти высоту H цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R. (*Ответ*: $H = 2R/\sqrt{3}$.)

3. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим? (*Ответ*: $20\sqrt{3}/3$ см.)

6.9. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ДЛИНЫ ДУГИ И КРИВИЗНА ПЛОСКОЙ ЛИНИИ

Дифференциал ds длины дуги s плоской линии, заданной уравнением $y = f(x)$, выражается формулой

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Если линия задана уравнением $x = \varphi(y)$, то

$$ds = \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2}\,dy.$$

В случае параметрического задания линии уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$

$$ds = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

Если линия задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, то

$$ds = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi.$$

Пример 1. Найти дифференциал длины дуги циклоиды, заданной уравнениями: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$.

▶ Имеем: $x' = a(1 - \cos t)$, $y' = a \sin t$. Тогда

$$ds = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\,dt =$$
$$= a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = a\sqrt{2(1 - \cos t)}\,dt =$$
$$= a\sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}\,dt = 2a \sin \frac{t}{2}\,dt. \ ◀$$

Кривизной K любой плоской линии в точке M называется предел модуля отношения угла между положительными направлениями касательных в точках M и N линии (*угла смежности*) к длине дуги $MN = \Delta s$, когда $N \to M$, т. е. по определению

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|,$$

где α — угол наклона касательной в точке M к оси Ox (рис. 6.9).

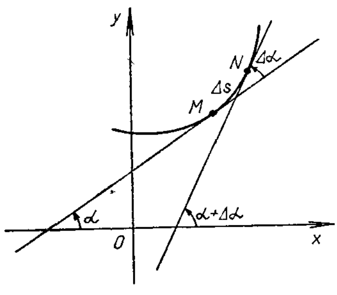


Рис. 6.9

Радиусом кривизны называется величина R, обратная кривизне K линии, т. е. $R = 1/K$. Например, для окружности $K = 1/R$, где R — радиус окружности; для прямой $K = 0$. Для произвольной линии кривизна, вообще говоря, не является постоянной величиной.

Если линия задана уравнением $y = f(x)$, то кривизна в любой ее точке вычисляется по формуле

$$K = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}}.$$

В случае параметрического задания линии уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ для вычисления кривизны применяется формула

$$K = \frac{|y''x' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}},$$

где производные берутся по переменной t.

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, то

$$K = \frac{|\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + (\rho')^2)^{3/2}},$$

где производные вычисляются по полярному углу φ.

Пример 2. Найти крнвизну н радиус кривизны линии $y = x^2$ в точке $M(1, 1)$.

▶ Вычнслим значения первой и второй производных данной функции в точке M: $y' = 2x$, $y'(1) = 2$, $y'' = 2$. Тогда

$$K = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1+4)^{3/2}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}, \quad R = \frac{1}{K} = \frac{5\sqrt{5}}{2}. \quad ◀$$

Построим в точке $M(x, y)$ нормаль к данной кривой (рис. 6.10), направленную в сторону ее вогнутости, и отложим иа этой иормали

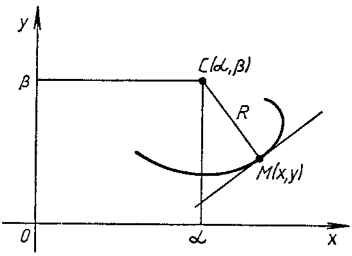


Рис. 6.10

отрезок $|MC|$, равный раднусу кривизны R кривой в точке M. Точка C называется *центром кривизны кривой* в точке M, а круг (окружность) радиусом R с центром в точке C — *кругом (окружностью) кривизны кривой в точке M.*

Координаты α и β центра кривнзны кривой для точки $M(x, y)$ вычисляются по формулам:

$$\alpha = x - y' \frac{1 + (y')^2}{y''}, \quad \beta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}. \qquad (6.4)$$

Множество всех центров кривизны кривой $y = f(x)$ называют *эволютой.* Формулы (6.4) являются параметрическими уравнениями эволюты с переменной x в качестве параметра. Эволютой любой окружности является ее центр, прямая эволюты не имеет.

Пример 3. Записать уравнение окружности кривизны линии $y = x^2 - 6x + 10$ в точке $M_0(3, 1)$.

▶ Находим зиачения y' и y'' в точке M_0: $y' = 2x - 6$, $y'|_{x=3} = 0$, $y'' = 2$. Тогда кривизна кривой в точке M_0 $K = 2$, радиус кривизны $R = 1/2$. По формулам (6.4) находим координаты центра кривнзны: $\alpha = 3$, $\beta = 3/2$. Уравнение окружности кривизны имеет вид

$$(x-3)^2 + (y - 3/2)^2 = 1/4. \quad ◀$$

Пример 4. Найти уравнение эволюты параболы $y^2 = 2px$.

▶ Находим первую и вторую производные в произвольной точке $M(x, y)$:

$$2yy' = 2p, \quad y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{p}{y^2}y' = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Тогда из формул (6.4) имеем:

$$\alpha = x - \frac{p}{y}\,\frac{1 + p^2/y^2}{-p^2/y^3} = 3x + p,$$
$$\beta = y + \frac{1 + p^2/y^2}{-p^2/y^3} = -\frac{y^3}{p^2} = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}.$$

Исключим из этих двух уравнений параметр x. В результате получим уравнение эволюты:

$$\beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3,$$

которое определяет полукубическую параболу (рис. 6.11). ◀

Линия L^*, которую описывает фиксированная точка M касательной, катящейся без скольжения по данной линии L, называется *эвольвентой (разверткой)* линии L (рис. 6.12). Данная линия L имеет бесчисленное

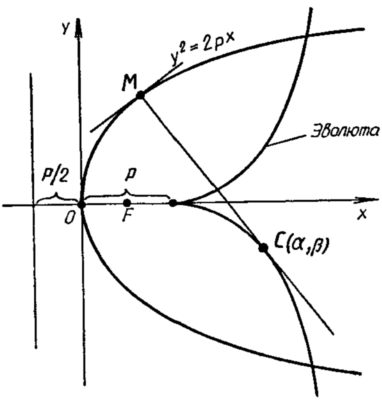


Рис. 6.11

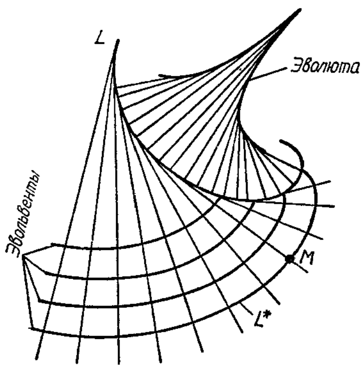


Рис. 6.12

множество эвольвент, единственную эволюту и всегда является эвольвентой по отношению к своей эволюте.

Пример 5. Составить параметрические уравнения эвольвенты окружности $x^2 + y^2 = r^2$, выходящей из точки $A(r, 0)$.

▶ Вводя указанным на рис. 6.13 способом параметр t и принимая во внимание, что длина дуги AC равна $|MC| = rt$, легко находим координаты любой точки эвольвенты $M(x, y)$:

$$x = |ON| = |OD| + |DN| = r\cos t + rt\sin t,$$
$$y = |DB| = |DC| - |BC| = r\sin t - rt\cos t.$$

Окончательно имеем:

$$x = r(\cos t + t\sin t),\quad y = r(\sin t - t\cos t). ◀$$

Отметим, что зубья цилиндрических шестерен чаще всего очерчиваются по эвольвенте окружности (рис. 6.14), так как при этом обеспечивается наиболее плавное и бесшумное их зацепление.

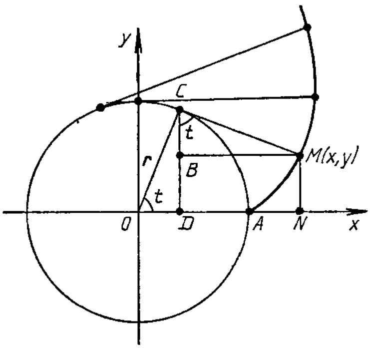


Рис. 6.13

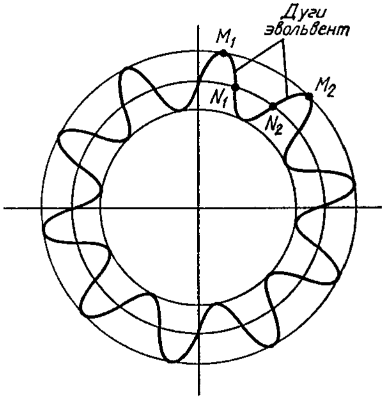


Рис. 6.14

АЗ-6.10

1. Найти дифференциал длины дуги кривой, заданной уравнениями $x = at\sin t$, $y = at\cos t$. (*Ответ*: $ds = 3a\cos t\sin t\,dt$.)

2. Найти дифференциал длины дуги кривой $y = \sqrt{x^3}$.

3. Найти дифференциал длины дуги кривой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } ds = a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.\right)$

4. Вычислить кривизну и радиус кривизны кривой $x^2 + xy + y^2 = 3$ в точке $A(1,\ 1)$. (*Ответ*: $K = 1/(3\sqrt{2})$, $R = 3\sqrt{2}$.)

5. Вычислить кривизну и радиус кривизны кривой $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ в точке $B(3,\ 2)$. (*Ответ*: $K = 1/6$, $R = 6$.)

6. Найти центр кривизны и записать уравнение окружности кривизны кривой $y = 1/x$ в точке $A(1,\ 1)$. (*Ответ*: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$.)

Самостоятельная работа

1. 1) Найти дифференциал длины дуги кривой $y = \operatorname{tg} x$;

2) вычислить кривизну и радиус кривизны кривой $y^2 = x^3$ в точке $M(4,\ 8)$. (*Ответ*: $K = 3/40$.)

2. 1) Найти дифференциал длины дуги кривой, заданной уравнениями $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$;

2) найти координаты центра кривизны и записать

уравнение окружности кривизны кривой $y=x^2-2x$ в точке $M_0(2, 0)$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } (x+3)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=125/4.\right)$

3. 1) Найти дифференциал длины дуги кривой $\rho = a(1+\sin\varphi)$;

2) найти центр кривизны и записать уравнение окружности кривизны кривой $y=\ln x$ в точке $M_1(1, 0)$. (*Ответ*: $(x-3)^2+(y+2)^2=8$.)

6.10. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 6

ИДЗ-6.1

Продифференцировать данные функции.

1

1.1. $y=2x^5-\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x}+3\sqrt{x}$.

1.2. $y=\frac{3}{x}+\sqrt[5]{x^2}-4x^3+\frac{2}{x^4}$.

1.3. $y=3x^4+\sqrt[3]{x^5}-\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}$.

1.4. $y=7\sqrt{x}-\frac{2}{x^5}-3x^3+\frac{4}{x}$.

1.5. $y=7x+\frac{5}{x^2}-\sqrt[7]{x^4}+\frac{6}{x}$.

1.6. $y=5x^2-\sqrt[3]{x^4}+\frac{4}{x^3}-\frac{5}{x}$.

1.7. $y=3x^5-\frac{3}{x}-\sqrt{x^3}+\frac{10}{x^5}$.

1.8. $y=\sqrt[3]{x^7}+\frac{3}{x}-4x^6+\frac{4}{x^5}$.

1.9. $y=8x^2+\sqrt[3]{x^4}-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^3}$.

1.10. $y=4x^6+\frac{5}{x}-\sqrt[3]{x^7}-\frac{7}{x^4}$.

1.11. $y=2\sqrt{x^3}-\frac{7}{x}+3x^2-\frac{2}{x^5}$.

1.12. $y=4x^3-\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^2}+\frac{6}{x^2}$.

1.13. $y=5x^3-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}+\frac{1}{x}$.

1.14. $y=\frac{9}{x^3}+\sqrt[3]{x^4}-\frac{2}{x}+5x^4.$

1.15. $y=\frac{4}{x^5}-\frac{9}{x}+\sqrt[5]{x^2}-7x^3.$

1.16. $y=\frac{8}{x^3}+\frac{3}{x}-4\sqrt{x^3}+2x^7.$

1.17. $y=5x^2+\frac{4}{x}-\sqrt[3]{x^7}-2x^6.$

1.18. $y=10x^2+3\sqrt{x^5}-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^4}.$

1.19. $y=\sqrt{x^5}-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}-3x^3.$

1.20. $y=9x^3+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^4}+\sqrt[3]{x^7}.$

1.21. $y=3\sqrt{x}+\frac{4}{x^5}+\sqrt[3]{x^2}-\frac{7}{x}.$

1.22. $y=\sqrt{x^3}+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^5}-5x^3.$

1.23. $y=7x^2+\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^4}+\frac{8}{x^3}.$

1.24. $y=8x^3-\frac{4}{x}-\frac{7}{x^4}+\sqrt[7]{x^2}.$

1.25. $y=8x-\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x}-\sqrt[5]{x^4}.$

1.26. $y=\sqrt[4]{x^3}-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^5}+3x.$

1.27. $y=4x^3+\frac{3}{x}-\sqrt[3]{x^5}-\frac{2}{x^4}.$

1.28. $y=4x^5-\frac{5}{x}-\sqrt{x^3}+\frac{2}{x^3}.$

1.29. $y=\frac{7}{x}+\frac{4}{x^3}-\sqrt[5]{x^3}-2x^6.$

1.30. $y=\frac{6}{x^4}-\frac{3}{x}+3x^3-\sqrt{x^7}.$

2

2.1. $y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\frac{4}{(x-2)^5}.$

2.2. $y=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\frac{3}{2x^3-3x+1}.$

2.3. $y=\sqrt{(x-4)^5}+\frac{5}{(2x^2+4x-1)^2}$.

2.4. $y=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\frac{5}{(x-1)^3}$.

2.5. $y=\sqrt[4]{3x^2-x+5}-\frac{3}{(x-5)^4}$.

2.6. $y=\sqrt{3x^4-2x^3+x}-\frac{4}{(x+2)^3}$.

2.7. $y=\sqrt[3]{(x-7)^5}+\frac{5}{4x^2+3x-5}$.

2.8. $y=\sqrt[5]{(x+4)^6}-\frac{2}{2x^2-3x+7}$.

2.9. $y=\frac{3}{(x-4)^7}-\sqrt{5x^2-4x+3}$.

2.10. $y=\sqrt[3]{4x^2-3x-4}-\frac{2}{(x-3)^5}$.

2.11. $y=\frac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3+x^2}$.

2.12. $y=\sqrt[5]{3x^2+4x-5}+\frac{4}{(x-4)^4}$.

2.13. $y=\sqrt[3]{5x^4-2x-1}+\frac{8}{(x-5)^2}$.

2.14. $y=\frac{3}{(x+2)^5}-\sqrt[7]{5x-7x^2-3}$.

2.15. $y=\sqrt[4]{(x-1)^5}-\frac{4}{7x^2-3x+2}$.

2.16. $y=\sqrt[5]{(x-2)^6}-\frac{3}{7x^3-x^2-4}$.

2.17. $y=\frac{3}{(x+4)^2}-\sqrt[3]{4+3x-x^4}$.

2.18. $y=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{8}{6x^2+3x-7}$.

2.19. $y=\sqrt{1+5x-2x^2}+\frac{3}{(x-3)^4}$.

2.20. $y=\sqrt[3]{5+4x-x^2}-\frac{5}{(x+1)^3}$.

2.21. $y=\sqrt[4]{5x^2-4x+1}-\frac{7}{(x-5)^2}$.

2.22. $y=\sqrt[5]{3-7x+x^2}-\frac{4}{(x-7)^5}$.

2.23. $y=\sqrt{(x-3)^7}+\frac{9}{7x^2-5x-8}$.

2.24. $y=\sqrt[3]{(x-8)^4}-\frac{2}{1+3x-4x^2}$.

2.25. $y=\frac{3}{4x-3x^2+1}-\sqrt{(x+1)^5}$.

2.26. $y=\frac{3}{x-4}+\sqrt[6]{(2x^2-3x+1)^5}$.

2.27. $y=\frac{4}{(x-7)^3}-\sqrt[3]{(3x^2-x+1)^4}$.

2.28. $y=\sqrt{(x-4)^7}-\frac{10}{(3x^2-5x+1)}$.

2.29. $y=\frac{7}{(x+2)^5}-\sqrt{8-5x+2x^2}$.

2.30. $y=\sqrt[3]{(x-1)^5}+\frac{5}{2x^2-4x+7}$.

3

3.1. $y=\sin^3 2x\cdot\cos 8x^5$.
3.2. $y=\cos^5 3x\cdot\operatorname{tg}(4x+1)^3$.
3.3. $y=\operatorname{tg}^4 x\cdot\arcsin 4x^5$.
3.4. $y=\arcsin^3 2x\cdot\operatorname{ctg} 7x^4$.
3.5. $y=\operatorname{ctg} 3x\cdot\arccos 3x^2$.
3.6. $y=\arccos^2 4x\cdot\ln(x-3)$.
3.7. $y=\ln^5 x\cdot\operatorname{arctg} 7x^4$.
3.8. $y=\operatorname{arctg}^3 4x\cdot 3^{\sin x}$.
3.9. $y=2^{\cos x}\cdot\operatorname{arcctg} 5x^3$.
3.10. $y=4^{-x}\cdot\ln^5(x+2)$.
3.11. $y=3^{\operatorname{tg} x}\cdot\arcsin 7x^4$.
3.12. $y=5^{x^2}\cdot\arccos 2x^5$.
3.13. $y=\sin^4 3x\cdot\operatorname{arctg} 2x^3$.
3.14. $y=\cos^3 4x\cdot\operatorname{arcctg}\sqrt{x}$.
3.15. $y=\operatorname{tg}^3 2x\cdot\arcsin x^5$.
3.16. $y=\operatorname{ctg}^7 x\cdot\arccos 2x^3$.
3.17. $y=e^{-\sin x}\operatorname{tg} 7x^6$.
3.18. $y=e^{\cos x}\operatorname{ctg} 8x^3$.
3.19. $y=\cos^5 x\cdot\arccos 4x$.
3.20. $y=\sin^3 7x\cdot\operatorname{arcctg} 5x^2$.
3.21. $y=\sin^2 3x\cdot\operatorname{arcctg} 3x^5$.
3.22. $y=\cos\sqrt[5]{x}\cdot\operatorname{arctg} x^4$.
3.23. $y=\operatorname{tg}^6 2x\cdot\cos 7x^2$.
3.24. $y=\operatorname{ctg}^3 4x\cdot\arcsin\sqrt{x}$.
3.25. $y=\operatorname{ctg}\frac{1}{x}\cdot\arccos x^4$.
3.26. $y=\operatorname{tg}\sqrt{x}\cdot\operatorname{arcctg} 3x^5$.
3.27. $y=\operatorname{tg}^3 2x\cdot\arccos 2x^3$.
3.28. $y=2^{\operatorname{tg} x}\operatorname{arctg}^5 3x$.
3.29. $y=\sin^5 3x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.
3.30 $y=\cos^4 3x\cdot\arcsin 3x^2$.

4

4.1. $y=\operatorname{arcctg}^2 5x\cdot\ln(x-4)$.
4.2. $y=\operatorname{arctg}^3 2x\cdot\ln(x+5)$.
4.3. $y=\arccos^4 x\cdot\ln(x^2+x-1)$.
4.4. $y=\sqrt{\arccos 2x}\cdot 3^{-x}$.

4.5. $y=\operatorname{tg}^4 3x\cdot\operatorname{arctg}7x^2$.
4.6. $y=5^{-x^2}\arcsin 3x^3$.
4.7. $y=\operatorname{arctg}^5 x\cdot\log_2(x-3)$.
4.8. $y=\log_3(x+5)\cdot\arccos 3x$.
4.9. $y=e^{-x}\cdot\arcsin^2 5x$.
4.10. $y=\log_4(x-1)\cdot\arcsin^4 x$.
4.11. $y=(x-4)^5\cdot\operatorname{arcctg}3x^2$.
4.12. $y=\operatorname{ctg}^3 4x\cdot\operatorname{arctg}2x^3$.
4.13. $y=e^{-\cos x}\operatorname{arctg}7x^5$.
4.14. $y=(x+1)\arccos 3x^4$.
4.15. $y=2^{\sin x}\operatorname{arcctg}x^4$.
4.16. $y=3^{-x^3}\operatorname{arctg}2x^5$.
4.17. $y=3^{\cos x}\arcsin^2 3x$.
4.18. $y=\ln(x-10)\cdot\arccos^2 4x$.
4.19. $y=\lg(x-2)\cdot\arcsin^5 x$.
4.20. $y=\log_3(x+1)\cdot\operatorname{arctg}^5 7x$.
4.21. $y=\ln(x+9)\cdot\operatorname{arcctg}^3 2x$.
4.22. $y=\lg(x+2)\cdot\arcsin^2 3x$.
4.23. $y=4^{-\sin x}\operatorname{arctg}3x$.
4.24. $y=2^{\cos x}\operatorname{arcctg}^3 x$.
4.25. $y=\lg(x-3)\cdot\arcsin^2 5x$.
4.26. $y=\log_2(x+3)\cdot\arccos^2 x$.
4.27. $y=2^{-x}\operatorname{arctg}^3 4x$.
4.28. $y=\ln(x-4)\cdot\operatorname{arcctg}^4 3x$.
4.29. $y=\lg(x+3)\cdot\operatorname{arcctg}^2 5x$.
4.30. $y=\log_5(x+1)\cdot\operatorname{arctg}^2 x^3$.

5

5.1. $y=\operatorname{tg}^4 3x\cdot\arcsin 2x^3$.
5.2. $y=(x-2)^4\arcsin 5x^4$.
5.3. $y=2^{-x^3}\operatorname{arctg}7x^4$.
5.4. $y=(x+6)^5\operatorname{arcctg}3x^5$.
5.5. $y=3^{\cos x}\ln(x^2-3x+7)$.
5.6. $y=\log_2(x-7)\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.
5.7. $y=\arccos^3 5x\cdot\operatorname{tg}x^4$.
5.8. $y=(x-5)^7\operatorname{arcctg}7x^3$
5.9. $y=\arccos x^2\cdot\operatorname{ctg}7x^3$.
5.10. $y=5^{-x^2}\arccos 5x^4$.
5.11. $y=\operatorname{arctg}^4 x\cdot\cos 7x^4$.
5.12. $y=4(x-7)^6\arcsin 3x^5$.
5.13. $y=(x+5)^2\arccos^3 5x$.
5.14. $y=2^{-\sin x}\arcsin^3 2x$.
5.15. $y=(x+2)^7\arccos\sqrt{x}$.
5.16. $y=(x-7)^5\arcsin 7x^4$.

5.17. $y=\ln(x-3)\cdot\arccos 3x^4$.
5.18. $y=\log_2(x-4)\cdot\operatorname{arctg}^3 4x$.
5.19. $y=(x-7)^4\operatorname{arcctg}^2 7x$.
5.20. $y=\sqrt[3]{x-3}\arccos^4 2x$.
5.21. $y=\sqrt[3]{x-4}\arcsin^4 5x$.
5.22. $y=(x-3)^5\arccos 3x^6$.
5.23. $y=\sqrt{(x+3)^5}\arcsin 2x^3$.
5.24. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}\arccos 3x$.
5.25. $y=\operatorname{tg}^3 x\cdot\operatorname{arcctg} 3x$.
5.26. $y=\sqrt{(x-2)^3}\operatorname{arctg}(7x-1)$.
5.27. $y=\sqrt[5]{(x+4)^2}\arcsin 7x^2$.
5.28. $y=\arcsin^3 4x\cdot\operatorname{ctg} 3x$.
5.29. $y=e^{-\cos x}\arcsin 2x$.
5.30. $y=\sqrt{(x+5)^3}\arccos^4 x$.

6

6.1. $y=(x-3)^4\arccos 5x^3$. 6.2. $y=(3x-4)^3\arccos 3x^2$.
6.3. $y=\operatorname{sh}^3 4x\cdot\arccos\sqrt{x}$. 6.4. $y=\operatorname{th}^2\sqrt{x}\cdot\operatorname{arcctg} 3x^2$.
6.5. $y=\operatorname{cth}^3 5x\cdot\arcsin 3x^2$. 6.6. $y=\operatorname{ch}\frac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg}(7x+2)$.
6.7. $y=\operatorname{ch}^3 4x\cdot\arccos 4x^2$. 6.8. $y=\operatorname{sh}^3 3x\cdot\operatorname{arcctg} 5x^2$.
6.9. $y=\operatorname{th}^5 3x\cdot\arcsin\sqrt{x}$.
6.10. $y=\operatorname{cth}^2(x+1)\cdot\arccos\frac{1}{x}$.
6.11. $y=\operatorname{sh}^4 2x\cdot\arccos x^2$.
6.12. $y=\operatorname{ch}^3(3x+2)\cdot\operatorname{arctg} 3x$.
6.13. $y=\operatorname{th}^3 4x\cdot\operatorname{arcctg} 3x^4$.
6.14. $y=\operatorname{cth}^4 7x\cdot\arcsin\sqrt{x}$.
6.15. $y=\operatorname{sh}^3 2x\cdot\arcsin 7x^2$.
6.16. $y=\operatorname{th}^5 4x\cdot\arccos 3x^4$.
6.17. $y=\operatorname{ch}^2 5x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.
6.18. $y=\operatorname{cth}^4 2x\cdot\operatorname{arctg} x^3$.
6.19. $y=\operatorname{sh}^4 5x\cdot\arccos 3x^2$.
6.20. $y=\operatorname{ch}^3 9x\cdot\operatorname{arctg}(5x-1)$.
6.21. $y=\operatorname{th}^4 x\cdot\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.
6.22. $y=\operatorname{cth}^3 4x\cdot\arcsin(3x+1)$.
6.23. $y=\operatorname{ch}^2 5x\cdot\operatorname{arctg} x^4$.
6.24. $y=\operatorname{th}^4 7x\cdot\arccos x^3$.

6.25. $y = \operatorname{cth} 4x^5 \cdot \arccos 2x$.
6.26. $y = \operatorname{cth} 3x \cdot \arcsin^4 2x$.
6.27. $y = \operatorname{th}^5 3x \cdot \operatorname{arcctg}\sqrt{x}$.
6.28. $y = \operatorname{sh}^4 3x \cdot \arccos 5x^4$.
6.29. $y = \operatorname{cth}^2 4x \cdot \arcsin x^3$.
6.30. $y = \operatorname{th}^3 5x \cdot \operatorname{arcctg}(2x - 5)$.

7

7.1. $y = \dfrac{e^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x+5}}$.

7.2. $y = \dfrac{(x-4)^2}{e^{\operatorname{arcctg} x}}$.

7.3. $y = \dfrac{e^{-x^3}}{\sqrt{x^2+5x-1}}$.

7.4. $y = \dfrac{e^{-\operatorname{ctg} 5x}}{(3x^2-4x+2)}$.

7.5. $y = \dfrac{\sqrt{7x^3-5x+2}}{e^{\cos x}}$.

7.6. $y = \dfrac{e^{\operatorname{tg} 3x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}$.

7.7. $y = \dfrac{e^{\sin x}}{(x-5)^7}$.

7.8. $y = \dfrac{\sqrt[3]{2x^2-3x+1}}{e^{-x}}$.

7.9. $y = \dfrac{\sqrt{x^3+4x-5}}{e^{x^3}}$.

7.10. $y = \dfrac{e^{\operatorname{ctg} 5x}}{(x+4)^3}$.

7.11. $y = \dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{e^x}$.

7.12. $y = \dfrac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2-4x-7}}$.

7.13. $y = \dfrac{e^{-\sin 2x}}{(x+5)^4}$.

7.14. $y = \dfrac{e^{\cos 5x}}{\sqrt{x^2-5x-2}}$.

7.15. $y = \dfrac{(2x+5)^3}{e^{\operatorname{tg} x}}$.

7.16. $y = \dfrac{e^{-\operatorname{tg} 3x}}{4x^2-3x+5}$.

7.17. $y = \dfrac{e^{-\sin 4x}}{(2x-5)^6}$.

7.18. $y = \dfrac{3x^2-5x+10}{e^{-x^4}}$.

7.19. $y = \dfrac{e^{-x}}{(2x^2-x+4)^2}$.

7.20. $y = \dfrac{e^{4x}}{(3x+5)^3}$.

7.21. $y = \dfrac{e^{\operatorname{ctg} 5x}}{(3x-5)^4}$.

7.22. $y = \dfrac{(2x-3)^7}{e^{-2x}}$.

7.23. $y = \dfrac{(3x+1)^4}{e^{4x}}$.

7.24. $y = \dfrac{5x^2+4x-2}{e^{-x}}$.

7.25. $y = \dfrac{\sqrt{5x^2-x+1}}{e^{3x}}$.

7.26. $y = \dfrac{e^{-x^2}}{(2x-5)^7}$.

7.27. $y = \dfrac{e^{\cos 3x}}{(2x+4)^5}$.

7.28. $y = \dfrac{e^{\sin 5x}}{(3x-2)^2}$.

7.29. $y=\frac{\sqrt{x^2-3x-7}}{e^{-x^3}}$.

7.30. $y=\frac{e^{-\operatorname{tg} x}}{4x^2+7x-5}$.

8

8.1. $y=\frac{\log_5(3x-7)}{\operatorname{ctg} 7x^3}$.

8.2. $y=\frac{\ln(5x-3)}{4\operatorname{tg} 3x^4}$.

8.3. $y=\frac{\ln(7x+2)}{5\cos 42x}$.

8.4. $y=\frac{\sin^3 5x}{\ln(2x-3)}$.

8.5. $y=\frac{\cos^2 3x}{\lg(3x-4)}$.

8.6. $y=\frac{\operatorname{tg}^3 2x}{\lg(5x+1)}$.

8.7. $y=\frac{\log_3(4x+5)}{2\operatorname{ctg}\sqrt{x}}$.

8.8. $y=\frac{\ln(7x-3)}{3\operatorname{tg}^2 4x}$.

8.9. $y=\frac{\lg(11x+3)}{\cos^2 5x}$.

8.10. $y=\frac{\operatorname{ctg}^2 5x}{\ln(7x-2)}$.

8.11. $y=\frac{\operatorname{tg}^2(x-2)}{\lg(x+3)}$.

8.12. $y=\frac{\sin^3(5x+1)}{\lg(3x-2)}$.

8.13. $y=\frac{\cos^4(7x-1)}{\lg(x+5)}$.

8.14. $y=\frac{\sin^3(4x+3)}{\ln(7x+1)}$.

8.15. $y=\frac{\operatorname{ctg}^3(2x-3)}{\log_3(x+2)}$.

8.16. $y=\frac{\lg^3 x}{\sin 5x^2}$.

8.17. $y=\frac{\ln^2(x+1)}{\cos 3x^4}$.

8.18. $y=\frac{\log_2(7x-5)}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$.

8.19. $y=\frac{\log_3(4x-2)}{\operatorname{ctg} 2x}$.

8.20. $y=\frac{\ln^3(x-5)}{\operatorname{tg}(1/x)}$.

8.21. $y=\frac{\lg(x+2)}{\sin 2x^5}$.

8.22. $y=\frac{\operatorname{tg}^3 7x}{\ln(3x+2)}$.

8.23. $y=\frac{\operatorname{ctg}\sqrt{x-2}}{\lg(3x+5)}$.

8.24. $y=\frac{\operatorname{tg}(3x-5)}{\ln^2(x+3)}$.

8.25. $y=\frac{\cos^2 x}{\lg(x^2-2x+1)}$.

8.26. $y=\frac{\log_2(3x+7)}{\operatorname{tg} 3x}$.

8.27. $y=\frac{\ln^3 x}{\operatorname{ctg}(x-3)}$.

8.28. $y=\frac{\operatorname{tg}^4 5x}{\ln(x+7)}$.

8.29. $y=\frac{\log_3(x+4)}{\cos^5 x}$.

8.30. $y=\frac{\operatorname{tg}^4 3x}{\lg(x^2-x+4)}$.

9

9.1. $y=\frac{\operatorname{arcctg}^4 5x}{\operatorname{sh}\sqrt{x}}$.

9.2. $y=\frac{\operatorname{arctg}^3 2x}{\operatorname{ch}(1/x)}$.

9.3. $y=\frac{\arccos 3x^4}{\operatorname{th}^2 x}$.

9.4. $y=\frac{\arcsin 5x^3}{\operatorname{ch}\sqrt{x}}$.

9.5. $y=\frac{\operatorname{cth}^3(x+1)}{\arccos 2x}$.

9.6. $y=\frac{\operatorname{th} 3x^5}{\operatorname{arctg}^2 3x}$.

9.7. $y=\frac{\arccos^7 2x}{\operatorname{th} x^5}$.

9.8. $y=\frac{\arcsin^3 4x}{\operatorname{sh}(3x+1)}$.

9.9. $y=\frac{\operatorname{th}^4(2x+5)}{\arccos 3x}$.

9.10. $y=\frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}}{\operatorname{sh}^2 x}$.

9.11. $y=\frac{\arcsin^2 4x}{\operatorname{th}(5x-3)}$.

9.12. $y=\frac{\operatorname{ch}^2(4x+2)}{\operatorname{arctg} x^3}$.

9.13. $y=\frac{\arcsin 4x^5}{\operatorname{th}^3 x}$.

9.14. $y=\frac{\operatorname{arctg}^3(2x+1)}{\operatorname{ch}\sqrt{x}}$.

9.15. $y=\frac{\arccos 4x^3}{\operatorname{sh}^4 x}$.

9.16. $y=\frac{\operatorname{cth}^2(x-2)}{\arccos 3x}$.

9.17. $y=\frac{\operatorname{th}^3(2x+2)}{\arcsin 5x}$

9.18. $y=\frac{\operatorname{cth}^2(3x-1)}{\arccos x^2}$.

9.19. $y=\frac{\operatorname{sh}^5 x}{\arccos 4x}$.

9.20. $y=\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^3 x}}{\operatorname{arctg} 5x}$.

9.21. $y=\frac{\operatorname{th}^2(x+3)}{\operatorname{arcctg}\sqrt{x}}$.

9.22. $y=\frac{\arcsin^2 3x}{\operatorname{ch}(x-5)}$.

9.23. $y=\frac{\operatorname{arcctg}^3 x}{\operatorname{sh}(2x-5)}$.

9.24. $y=\frac{\arccos^3 5x}{\operatorname{th}(x-2)}$.

9.25. $y=\frac{\sqrt{\arccos 3x}}{\operatorname{sh}^2 x}$.

9.26. $y=\frac{\arcsin^2 3x}{\sqrt{\operatorname{th} x}}$.

9.27. $y=\frac{\operatorname{arctg}^2 5x}{\sqrt[3]{\operatorname{cth} x}}$.

9.28. $y=\frac{\operatorname{arctg}^2 5x}{\operatorname{th}(x+3)}$.

9.29. $y=\frac{\sqrt{\operatorname{sh}^3 x}}{\operatorname{arcctg} 5x}$.

9.30. $y=\frac{\sqrt[5]{\operatorname{ch} 3x}}{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

10

10.1. $y=\frac{9\operatorname{arctg}(x+7)}{(x-1)^2}$.

10.2. $y=\frac{8\operatorname{arctg}(2x+3)}{(x+1)^3}$.

10.3. $y=\frac{7\arccos(4x-1)}{(x+2)^4}$.

10.4. $y=\frac{6\arcsin(x+5)}{(x-2)^5}$.

10.5. $y=\frac{3\operatorname{arcctg}(2x-5)}{(x+1)^4}$.

10.6. $y=\frac{2\operatorname{arctg}(3x+2)}{(x-3)^2}$.

10.7. $y=\frac{4\arccos 3x}{(x+2)^5}$.

10.8. $y=\frac{\arcsin(3x+8)}{(x-7)^3}$.

10.9. $y=\frac{7\,\mathrm{arctg}(4x+1)}{(x-4)^2}$.

10.10. $y=\frac{3\arcsin(2x-7)}{(x+2)^4}$.

10.11. $y=\frac{2\lg(4x+5)}{(x+6)^4}$.

10.12. $y=\frac{5\ln(5x+7)}{(x-7)^2}$.

10.13. $y=\frac{4\log_3(3x+1)}{(x+1)^2}$.

10.14. $y=\frac{7\log_4(2x-5)}{(x-1)^5}$.

10.15. $y=\frac{\ln(7x+2)}{(x-6)^4}$.

10.16. $y=\frac{4\lg(3x+7)}{(x+1)^7}$.

10.17. $y=\frac{5\log_2(x^2+1)}{(x-3)^4}$.

10.18. $y=\frac{6\log_3(2x+9)}{(x+4)^2}$.

10.19. $y=\frac{3\log_2(5x-4)}{(x-3)^5}$.

10.20. $y=\frac{7\log_5(x^2+x)}{(x+3)^3}$.

10.21. $y=\frac{\log_7(2x^2+5)}{(x-4)^2}$.

10.22. $y=\frac{2\ln(3x-10)}{(x+5)^7}$.

10.23. $y=\frac{8\lg(4x+5)}{(x-1)^5}$.

10.24. $y=\frac{2\log_3(4x-7)}{(x+3)^4}$.

10.25. $y=\frac{3\log_4(2x+9)}{(x-7)^2}$.

10.26. $y=\frac{\lg(x^2+2x)}{(x+8)^4}$.

10.27. $y=\frac{3\ln(x^2+5)}{(x-7)^3}$.

10.28. $y=\frac{4\log_2(3x-5)}{(x-2)^2}$.

10.29. $y=\frac{2\ln(2x^2+3)}{(x-7)^4}$.

10.30. $y=\frac{4\lg(3x+7)}{(x-5)^3}$.

11

11.1. $y=\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}\log_2(x-3x^2)$.

11.2. $y=\sqrt[3]{\frac{2x-5}{2x+3}}\lg(4x+7)$.

11.3. $y=\sqrt[4]{\frac{x+3}{x-3}}\ln(5x^2-2x+1)$.

11.4. $y=\sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}}\log_3(x^2+x+4)$.

11.5. $y=\sqrt[6]{\frac{7x-4}{7x+4}}\log_5(3x^2+2x)$.

11.6. $y=\sqrt[7]{\frac{2x-3}{2x+1}}\lg(7x-10)$.

11.7. $y=\sqrt[8]{\frac{5x+1}{5x-1}}\ln(3x-x^2)$.

11.8. $y=\sqrt[9]{\frac{x+3}{x-3}}\log_5(2x-3)$.

11.9. $y=\sqrt{\frac{6x+5}{6x-5}}\lg(4x+7)$.

11.10. $y=\sqrt[3]{\frac{4x-1}{4x+1}}\ln(2x^3-3)$.

11.11. $y=\sqrt[4]{\frac{x+6}{x-6}}\sin(3x^2+1)$.

11.12. $y=\sqrt[5]{\frac{x-7}{x+7}}\cos(2x^3+x)$.

11.13. $y=\sqrt[6]{\frac{x-9}{x+9}}\operatorname{tg}(3x^2-4x+1)$.

11.14. $y=\sqrt[7]{\frac{x-4}{x+4}}\operatorname{ctg}(2x+5)$.

11.15. $y=\sqrt[8]{\frac{x-2}{x+2}}\sin(4x^2-7x+2)$.

11.16. $y=\sqrt[9]{\frac{x-3}{x+3}}\cos(x^2-3x+2)$.

11.17. $y=\sqrt{\frac{3x-2}{3x+2}}\operatorname{tg}(2x^2-9)$.

11.18. $y=\sqrt{\frac{2x+3}{2x-3}}\operatorname{ctg}(3x^2+5)$.

11.19. $y=\sqrt[4]{\frac{x+5}{x-5}}\sin(3x^2-x+4)$.

11.20. $y=\sqrt[5]{\frac{x-6}{x+6}}\cos(7x+2)$.

11.21. $y=\sqrt[6]{\frac{x-7}{x+7}}\arcsin(2x+3)$.

11.22. $y=\sqrt[7]{\frac{x-8}{x+8}}\arccos(3x-5)$.

11.23. $y=\sqrt[8]{\frac{x-4}{x+4}}\,\mathrm{arctg}(5x+1)$.

11.24. $y=\sqrt[9]{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{arcctg}(7x+2)$.

11.25. $y=\sqrt{\frac{7x-4}{7x+4}}\,\arcsin(x^2+1)$.

11.26. $y=\sqrt[3]{\frac{8x-3}{8x+3}}\,\arccos(x^2-5)$.

11.27. $y=\sqrt[4]{\frac{2x-5}{2x+5}}\,\mathrm{arctg}(3x+2)$.

11.28. $y=\sqrt[5]{\frac{3x-4}{3x+4}}\,\mathrm{arcctg}(2x+5)$.

11.29. $y=\sqrt[6]{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\,\arcsin 2x$.

11.30. $y=\sqrt[7]{\frac{x^2+3}{x^2-3}}\,\arccos 4x$.

12

12.1. $y=(\mathrm{cth}\,3x)^{\arcsin x}$.

12.2. $y=(\cos(x+2))^{\ln x}$.

12.3. $y=(\sin 3x)^{\arccos x}$.

12.4. $y=(\mathrm{th}\,5x)^{\arcsin(x+1)}$.

12.5. $y=(\mathrm{sh}(x+2))^{\arcsin 2x}$.

12.6. $y=(\cos 5x)^{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}$.

12.7. $y=(\sqrt{3x+2})^{\mathrm{arcctg}\,3x}$.

12.8. $y=(\ln(x+3))^{\sin\sqrt{x}}$.

12.9. $y=(\log_2(x+4))^{\mathrm{ctg}\,7x}$.

12.10. $y=(\mathrm{sh}\,3x)^{\mathrm{arctg}(x+2)}$.

12.11. $y=(\mathrm{ch}\,3x)^{\mathrm{ctg}\,1/x}$.

12.12. $y=(\arcsin 5x)^{\mathrm{tg}\sqrt{x}}$.

12.13. $y=(\arccos 5x)^{\ln x}$.

12.14. $y=(\mathrm{arctg}\,2x)^{\sin x}$.

12.15. $y=(\ln(x+7))^{\mathrm{ctg}\,2x}$.

12.16. $y=(\mathrm{ctg}(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$.

12.17. $y=(\mathrm{th}\sqrt{x+1})^{\mathrm{arctg}\,2x}$.

12.18. $y=\left(\mathrm{cth}\,\frac{1}{x}\right)^{\arcsin 7x}$.

12.19. $y=(\cos(x+5))^{\arcsin 3x}$.

12.20. $y=(\sqrt{x+5})^{\arccos 3x}$.

12.21. $y=(\sin 4x)^{\mathrm{arctg}\,1/x}$.

12.22. $y=(\mathrm{tg}\,3x^4)^{\sqrt{x+3}}$.

12.23. $y=(\mathrm{ctg}\,2x^3)^{\sin\sqrt{x}}$.

12.24. $y=(\mathrm{tg}\,7x^5)^{\sqrt{x+2}}$.

12.25. $y=(\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$.

12.26. $y=(\mathrm{ctg}\,7x)^{\mathrm{sh}(x+3)}$.

12.27. $y=(\mathrm{sh}\,5x)^{\mathrm{arctg}(x+2)}$.

12.28. $y=(\mathrm{arctg}\,x)^{\mathrm{th}(3x+1)}$.

12.29. $y=(\mathrm{cth}\sqrt{x})^{\sin(x+3)}$.

12.30. $y=(\mathrm{sh}\,3x)^{\mathrm{arcctg}\,2x}$.

13

13.1. $y=(\arccos(x+2))^{\operatorname{tg}3x}$. 13.2. $y=(\arcsin 2x)^{\operatorname{ctg}(x+1)}$.
13.3. $y=(\operatorname{arctg}(x+7))^{\cos 2x}$. 13.4. $y=(\operatorname{arcctg}(x-3))^{\sin 4x}$.
13.5. $y=(\operatorname{ctg}(3x-2))^{\arcsin 3x}$. 13.6. $y=(\operatorname{tg}(4x-3))^{\arccos 2x}$.
13.7. $y=(\cos(2x-5))^{\operatorname{arctg}5x}$. 13.8. $y=(\sin(7x+4))^{\operatorname{arcctg}x}$.
13.9. $y=(\arcsin 2x)^{\ln(x+3)}$. 13.10. $y=(\arccos 3x)^{\lg(5x-1)}$.
13.11. $y=(\operatorname{arctg}5x)^{\log_2(x+4)}$. 13.12. $y=(\operatorname{arctg}7x)^{\lg(x+1)}$.
13.13. $y=(\log_4(2x+3))^{\arcsin x}$. 13.14. $y=(\log_5(3x+2))^{\arccos x}$.
13.15. $y=(\lg(7x-5))^{\operatorname{arctg}2x}$. 13.16. $y=(\ln(5x-4))^{\operatorname{arcctg}x}$.
13.17. $y=(\log_2(6x+5))^{\arcsin 2x}$. 13.18. $y=(\lg(4x-3))^{\arccos 4x}$.
13.19. $y=(\ln(7x-3))^{\operatorname{arctg}5x}$. 13.20. $y=(\log_5(2x+5))^{\operatorname{arctg}x}$.
13.21. $y=(\sin(8x-7))^{\operatorname{cth}(x+3)}$.
13.22. $y=(\cos(3x+8))^{\operatorname{th}(x-7)}$.
13.23. $y=(\operatorname{tg}(9x+2))^{\operatorname{ch}(2x-1)}$.
13.24. $y=(\operatorname{ctg}(7x+5))^{\operatorname{sh}3x}$.
13.25. $y=(\operatorname{sh}(3x-7))^{\cos(x+4)}$.
13.26. $y=(\operatorname{ch}(2x-3))^{\operatorname{tg}(x+5)}$.
13.27. $y=(\operatorname{th}(7x-5))^{\sin(x+2)}$.
13.28. $y=(\operatorname{ch}(3x+2))^{\cos(x+4)}$.
13.29. $y=(\ln(7x+4))^{\operatorname{tg}x}$.
13.30. $y=(\lg(8x+3))^{\operatorname{tg}5x}$.

14

14.1. $y=\dfrac{\sqrt{x+7}\,(x-3)^4}{(x+2)^5}$. 14.2. $y=\dfrac{(x-3)^5(x+2)^3}{\sqrt{(x-1)^3}}$.

14.3. $y=\dfrac{(x-2)^3\sqrt{(x+1)^5}}{(x-4)^2}$. 14.4. $y=\dfrac{(x+3)\sqrt[5]{(x-2)^2}}{(x+1)^7}$.

14.5. $y=\dfrac{(x+2)^7(x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}}$. 14.6. $y=\dfrac{(x-1)^4(x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$.

14.7. $y=\dfrac{(x-3)^2\sqrt{x+4}}{(x+2)^7}$. 14.8. $y=\dfrac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+3)^5}$.

14.9. $y=\dfrac{(x+1)^8(x-3)^2}{\sqrt{(x+2)^5}}$. 14.10. $y=\dfrac{(x+2)(x-7)^4}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

14.11. $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$. 14.12. $y=\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^7}}{(x+1)^5(x-5)^3}$.

14.13. $y=\dfrac{\sqrt{(x+2)^3}(x-1)^4}{(x+2)^7}$. **14.14.** $y=\dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^5}(x+3)^2}{(x-7)^3}$.

14.15. $y=\dfrac{\sqrt[4]{x-8}\,(x+2)^6}{(x-1)^5}$. **14.16.** $y=\dfrac{\sqrt[5]{x+1}\,(x-3)^7}{(x+8)^3}$.

14.17. $y=\dfrac{\sqrt[7]{(x-2)^4}}{(x+1)^2(x-6)^5}$. **14.18.** $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+1)^2}}{(x-3)^4(x-4)^3}$.

14.19. $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+3)^7(x-4)^2}$. **14.20.** $y=\dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^4}}{(x-5)(x+1)^7}$.

14.21. $y=\dfrac{(x+4)^3\,(x-2)^4}{\sqrt[3]{(x-2)^5}}$. **14.22.** $y=\dfrac{(x-1)^6(x+2)^3}{\sqrt[5]{(x+3)^2}}$.

14.23. $y=\dfrac{(x-1)^4(x-7)^2}{\sqrt[3]{(x+2)^5}}$. **14.24.** $y=\dfrac{(x+7)^2(x-3)^5}{\sqrt{x^2+3x-1}}$.

14.25. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-3}\,(x+7)^5}{(x-4)^2}$. **14.26.** $y=\dfrac{\sqrt{x+10}\,(x-8)^3}{(x-1)^5}$.

14.27. $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x-2)^3}\,(x-1)}{(x+3)^4}$. **14.28.** $y=\dfrac{\sqrt[4]{(x+1)^3}\,(x-2)^5}{(x-3)^2}$.

14.29. $y=\dfrac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{(x+2)^4(x-5)^7}$. **14.30.** $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4(x-3)^5}$.

Решение типового варианта

Продифференцировать данные функции.

1. $y=9x^5-4/x^3+\sqrt[3]{x^7}-3x+4$.

▶ $y'=9\cdot 5x^4-4(-3)x^{-4}+\frac{7}{3}x^{4/3}-3=45x^4+$
$+12/x^4+\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}-3$. ◀

2. $y=\sqrt[4]{(2x^2-3x+1)^3}-6/(x+1)^3$.

▶ $y'=\frac{3}{4}(2x^2-3x+1)^{-1/4}(4x-3)-6(-3)(x+1)^{-4}=$

$$=\frac{3}{4}\,\frac{4x-3}{\sqrt[4]{2x^2-3x+1}}+\frac{18}{(x+1)^4}.$$ ◀

3. $y=\operatorname{tg}^5(x+2)\cdot\arccos 3x^2$.

▶ $y'=5\operatorname{tg}^4(x+2)\cdot\frac{1}{\cos^2(x+2)}\arccos 3x^2+\operatorname{tg}^5(x+$

$$+2)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-9x^4}}\right)\cdot 6x=\frac{5\,\mathrm{tg}^4(x+2)\cdot\arccos 3x^2}{\cos^2(x+2)}-$$

$$-\frac{\mathrm{tg}^5(x+2)\cdot 6x}{\sqrt{1-9x^4}}.\ ◀$$

4. $y=\arcsin^5 4x\cdot\log_2(x-5)$.

▶ $$y'=5\arcsin^4 4x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}\cdot 4\log_2(x-5)+$$

$$+\arcsin^5 4x\cdot\frac{1}{(x-5)\ln 2}=\frac{20\arcsin^4 4x\cdot\log_2(x-5)}{\sqrt{1-16x^2}}+$$

$$+\frac{\arcsin^5 4x}{(x-5)\ln 2}.\ ◀$$

5. $y=3^{-x^4}\,\mathrm{ctg}\,7x^3$.

▶ $$y'=3^{-x^4}\ln 3\cdot(-4x^3)\,\mathrm{ctg}\,7x^3+3^{-x^4}\left(\frac{1}{-\sin^2 7x^3}\right)\times$$

$$\times 21x^2=-4\ln 3\cdot 3^{-x^4}x^3\,\mathrm{ctg}\,7x^3-\frac{21x^3\cdot 3^{-x^4}}{\sin^2 7x^3}.\ ◀$$

6. $y=\mathrm{cth}^2 3x\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{x}$.

▶ $$y'=2\,\mathrm{cth}\,3x\cdot\left(-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3x}\right)\cdot 3\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}+\mathrm{cth}^2 3x\times$$

$$\times\frac{1}{1+x}\ \frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{6\,\mathrm{cth}\,3x\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\mathrm{sh}^2 3x}+\frac{\mathrm{cth}^2 3x}{(1+x)2\sqrt{x}}.\ ◀$$

7. $y=\sqrt{3x^2-7x+5}/e^{-x^4}$.

▶ $$y'=(\sqrt{3x^2-7x+5}\,e^{x^4})'=\frac{(6x-7)e^{x^4}}{2\sqrt{3x^2-7x+5}}+$$

$$+\sqrt{3x^2-7x+5}\,e^{x^4}\cdot 4x^3=\frac{(6x-7)e^{x^4}}{2\sqrt{3x^2-7x+5}}+$$

$$+4x^3e^{x^4}\sqrt{3x^2-7x+5}.\ ◀$$

8. $y=(\lg(x^2-3x+5))/\mathrm{arcctg}^2 5x$.

▶ $$y'=\left(\frac{2x-3}{(x^2-3x+5)\ln 10}\,\mathrm{arcctg}^2 5x-\lg(x^2-3x+5)\times\right.$$

$$\left.\times 2\cdot\mathrm{arcctg}\,5x\cdot\left(-\frac{1}{1+25x^2}\right)\cdot 5\right)\cdot\mathrm{arcctg}^4 5x=$$

$$=\left(\frac{(2x-3)\,\mathrm{arcctg}^2 5x}{(x^2-3x+5)\ln 10}+\frac{10\lg(x^2-3x+5)\cdot\mathrm{arcctg}\,5x}{1+25x^2}\right)\times$$

$$\times\,\mathrm{arcctg}^{-4} 5x.\ ◀$$

9. $y=\sqrt{\arcsin 3x}/\mathrm{sh}^2 x$.

$$\blacktriangleright\ y' = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\arcsin 3x}}\dfrac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3\,\mathrm{sh}^2 x - 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x\sqrt{\arcsin 3x}}{\mathrm{sh}^4 x} =$$

$$= \frac{\dfrac{3\,\mathrm{sh}^2 x}{2\sqrt{\arcsin 3x}\sqrt{1-9x^2}} - \mathrm{ch}\,2x\sqrt{\arcsin 3x}}{\mathrm{sh}^4 x}. \blacktriangleleft$$

10. $y = (3\ln(x^2-5))/(x+3)^7$.

$$\blacktriangleright\ y' = 3\,\frac{\dfrac{1}{x^2-5} \cdot 2x(x+3)^7 - 7(x+3)^6 \ln(x^2-5)}{(x+3)^{14}} =$$

$$= 3\,\frac{\dfrac{2x(x+3)}{x^2-5} - 7\ln(x^2-5)}{(x+3)^8}. \blacktriangleleft$$

11. $y = \sqrt[7]{(x+5)/(x-5)}\,\mathrm{ctg}\,(3x-4)$.

$$\blacktriangleright\ y' = \frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-6/7} \frac{x-5-(x+5)}{(x-5)^2}\,\mathrm{ctg}\,(3x-4) -$$

$$- \frac{1}{\sin^2(3x-4)} \cdot 3\sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}} = -\frac{10}{7}\,\frac{\mathrm{ctg}\,(3x-4)}{\sqrt[7]{(x+5)^6/(x-5)^6}} -$$

$$- \frac{3}{\sin^2(3x-4)}\sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}}. \blacktriangleleft$$

12. $y = \left(\mathrm{th}\sqrt{x+2}\right)^{\ln(3x+2)}$.

▶ Прологарифмируем данную функцию:

$$\ln y = \ln(3x+2)\ln\left(\mathrm{th}\sqrt{x+2}\right).$$

Тогда

$$\frac{1}{y}y' = \frac{3}{3x+2}\ln\left(\mathrm{th}\sqrt{x+2}\right) +$$

$$+ \ln(3x+2) \cdot \frac{1}{\mathrm{th}\sqrt{x+2}\,\mathrm{ch}^2\sqrt{x+2}}\,\frac{1}{2\sqrt{x+2}}.$$

Отсюда выразим y':

$$y' = \left(\mathrm{th}\sqrt{x+2}\right)^{\ln(3x+2)}\left(\frac{3\ln\left(\mathrm{th}\sqrt{x+2}\right)}{3x+2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\ln(3x+2)}{2\sqrt{x+2}\,\mathrm{sh}\sqrt{x+2}\,\mathrm{ch}\sqrt{x+2}}\right). \blacktriangleleft$$

13. $y = (\sin 7x)^{\mathrm{arctg}\,(3x-5)}$.

Найдя

$$\ln y = \mathrm{arctg}\,(3x-5) \cdot \ln(\sin 7x),$$

имеем:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{1+(3x-5)^2}\cdot 3\ln(\sin 7x) + \operatorname{arctg}(3x-5)\cdot\frac{1}{\sin 7x}\times$$
$$\times 7\cos 7x.$$

Отсюда

$$y' = (\sin 7x)^{\operatorname{arctg}(3x-5)}\left(\frac{3\ln(\sin 7x)}{1+(3x-5)^2} + \frac{7\operatorname{arctg}(3x-5)\cdot\cos 7x}{\sin 7x}\right). ◀$$

14. $y = \sqrt[7]{(x+5)^6}/((x-1)^2(x+3))$.

▶ Применяя метод логарифмического дифференцирования (см. § 6.2), последовательно находим:

$$\ln y = \frac{6}{7}\ln(x+5) - 2\ln(x-1) - 5\ln(x+3),$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{6}{7(x+5)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3},$$

$$y' = \frac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)^5}\left(\frac{6}{7(x+5)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3}\right). ◀$$

ИДЗ-6.2

1. Найти y' и y''.

1.1. $y^2 = 8x$.
1.2. $x^2/5 + y^2/7 = 1$.
1.3. $y = x + \operatorname{arctg} y$.
1.4. $x^2/5 + y^2/3 = 1$.
1.5. $y^2 = 25x - 4$.
1.6. $\operatorname{arcctg} y = 4x + 5y$.
1.7. $y^2 - x = \cos y$.
1.8. $3x + \sin y = 5y$.
1.9. $\operatorname{tg} y = 3x + 5y$.
1.10. $xy = \operatorname{ctg} y$.
1.11. $y = e^y + 4x$.
1.12. $\ln y - y/x = 7$.
1.13. $y^2 + x^2 = \sin y$.
1.14. $e^y = 4x - 7y$.
1.15. $4\sin^2(x+y) = x$.
1.16. $\sin y = 7x + 3y$.
1.17. $\operatorname{tg} y = 4y - 5x$.
1.18. $y = 7x - \operatorname{ctg} y$.
1.19. $xy - 6 = \cos y$.
1.20. $3y = 7 + xy^3$.
1.21. $y^2 = x + \ln(y/x)$.
1.22. $xy^2 - y^3 = 4x - 5$.
1.23. $x^2y^2 + x = 5y$.
1.24. $x^4 + x^2y^2 + y = 4$.
1.25. $\sin y = xy^2 + 5$.
1.26. $x^3 + y^3 = 5x$.
1.27. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{7}$.
1.28. $y^2 = (x-y)/(x+y)$.
1.29. $\sin^2(3x+y^2) = 5$.
1.30. $\operatorname{ctg}^2(x+y) = 5x$.

2. Найти y' и y''.

2.1. $\begin{cases} x = (2t+3)\cos t, \\ y = 3t^3. \end{cases}$
2.2. $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$
2.4. $\begin{cases} x = 1/(t+2), \\ y = (t/(t+2))^2. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{4t}. \end{cases}$
2.6. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t}. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} x = 2t/(1+t^3), \\ y = t^2/(1+t^2). \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2-1}, \\ y = (t+1)/\sqrt{t^2-1}. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x = 4t + 2t^2, \\ y = 5t^3 - 3t^2. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} x = (\ln t)/t, \\ y = t \ln t. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} x = t^4, \\ y = \ln t. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 4 \sin t. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} x = 3(\sin t - t \cos t), \\ y = 3(\cos t + t \sin t). \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = e^{-3t}. \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} x = (\ln t)/t, \\ y = t^2 \ln t. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} x = 1/(t+1), \\ y = (t/(t+1))^2. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} x = 5 \sin^3 t, \\ y = 3 \cos^3 t. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{8t}. \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{(t-1)^2}, \\ y = \sqrt{t-1}. \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} x = te^t, \\ y = t/e^t. \end{cases}$

2.29. $\begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3t^5. \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

3. Для данной функции y и аргумента x_0 вычислить $y'''(x_0)$.

3.1. $y = \sin^2 x,\ x_0 = \pi/2$. **3.2.** $y = \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 1$.

3.3. $y = \ln(2 + x^2),\ x_0 = 0$. **3.4.** $y = e^x \cos x,\ x_0 = 0$.

3.5. $y = e^x \sin 2x,\ x_0 = 0$. **3.6.** $y = e^{-x} \cos x,\ x_0 = 0$.

3.7. $y = \sin 2x,\ x_0 = \pi$. **3.8.** $y = (2x+1)^5,\ x_0 = 1$.

3.9. $y = \ln(1+x),\ x_0 = 2$. **3.10.** $y = \frac{1}{2} x^2 e^x,\ x_0 = 0$.

3.11. $y = \arcsin x,\ x_0 = 0$. **3.12.** $y = (5x-4)^5,\ x_0 = 2$.

3.13. $y = x \sin x,\ x_0 = \pi/2$. **3.14.** $y = x^2 \ln x,\ x_0 = 1/3$.

3.15. $y = x \sin 2x,\ x_0 = -\pi/4$.

3.16. $y = x \cos 2x,\ x_0 = \pi/12$.

3.17. $y = x^4 \ln x,\ x_0 = 1$. **3.18.** $y = x + \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 1$.

3.19. $y = \cos^2 x,\ x_0 = \pi/4$. **3.20.** $y = \ln(x^2 - 4),\ x_0 = 3$.

3.21. $y = x^2 \cos x,\ x_0 = \pi/2$.

3.22. $y=x\arccos x,\ x_0=\sqrt{3}/2$.
3.23. $y=(x+1)\ln(x+1),\ x_0=-1/2$.
3.24. $y=\ln^3 x,\ x_0=1$. **3.25.** $y=2^{x^2},\ x_0=1$.
3.26. $y=(4x-3)^5,\ x_0=1$.
3.27. $y=x\,\mathrm{arcctg}\,x,\ x_0=2$. **3.28.** $y=(7x-4)^6,\ x_0=1$.
3.29. $y=x\sin 2x,\ x_0=\pi/4$.
3.30. $y=\sin(x^3+\pi),\ x_0=\sqrt[3]{\pi}$.

4. Записать формулу для производной n-го порядка указанной фуикции.

4.1. $y=\ln x$. **4.2.** $y=1/x$.
4.3. $y=2^x$. **4.4.** $y=\cos x$.
4.5. $y=\sin x$. **4.6.** $y=1/(x+5)$.
4.7. $y=e^{-2x}$. **4.8.** $y=\ln(3+x)$.
4.9. $y=\sqrt{x}$. **4.10.** $y=xe^{3x}$.
4.11. $y=1(x-3)$. **4.12.** $y=\ln(5+x^2)$.
4.13. $y=e^{4x}$. **4.14.** $y=1/(x-7)$.
4.15. $y=5^x$. **4.16.** $y=e^{-5x}$.
4.17. $y=\ln(4+x)$. **4.18.** $y=1/(x-6)$.
4.19. $y=10^x$. **4.20.** $y=7^x$.
4.21. $y=\cos 3x$. **4.22.** $y=\ln(3x-5)$.
4.23. $y=\frac{x}{x+5}$. **4.24.** $y=\ln\frac{1}{4-x}$.
4.25. $y=\sqrt{x+7}$. **4.26.** $y=xe^{6x}$.
4.27. $y=\frac{4}{x+3}$. **4.28.** $y=\frac{1+x}{\sqrt{x}}$.
4.29. $y=\frac{1}{1+x}$. **4.30.** $y=\ln(5x-1)$.

5. Решить следующие задачи.

5.1. Записать уравнение касательной к кривой $y=x^2-7x+3$ в точке с абсциссой $x=1$.

5.2. Записать уравнение нормали к кривой $y=x^2-16x+7$ в точке с абсциссой $x=1$.

5.3. Записать уравнение касательной к линии $y=\sqrt{x-4}$ в точке с абсциссой $x=8$.

5.4. Записать уравнение нормали к линии $y=\sqrt{x+4}$ в точке с абсциссой $x=-3$.

5.5. Записать уравнение касательной к кривой $y=x^3-2x^2+4x-7$ в точке $(2,\ 1)$.

5.6. Записать уравнение нормали к кривой $y=x^3-5x^2+7x-2$ в точке $(1,\ 1)$.

5.7. Определить угловой коэффициент касательной к кривой $x^2 - y^2 + xy - 11 = 0$ в точке $(3, 2)$.

5.8. В какой точке кривой $y^2 = 4x^3$ касательная перпендикулярна к прямой $x + 3y - 1 = 0$?

5.9. Записать уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 6x + 2$ в точке с абсциссой $x = 2$.

5.10. Записать уравнение касательной к кривой $y = x^2/4 - x + 5$ в точке с абсциссой $x = 4$.

5.11. Записать уравнение нормали к кривой $y = x^4/4 - 27x + 60$ в точке с абсциссой $x = 2$.

5.12. Записать уравнение касательной к кривой $y = -\frac{x^2}{2} + 7x - 15/2$ в точке с абсциссой $x = 3$.

5.13. Записать уравнение нормали к кривой $y = 3\,\mathrm{tg}\,2x + 1$ в точке с абсциссой $x = \pi/2$.

5.14. Записать уравнение касательной к кривой $y = 4\,\mathrm{tg}\,3x$ в точке с абсциссой $x = \pi/9$.

5.15. Записать уравнение нормали к кривой $y = 6\,\mathrm{tg}\,5x$ в точке с абсциссой $x = \pi/20$.

5.16. Записать уравнение касательной к кривой $y = 4\sin 6x$ в точке с абсциссой $x = \pi/18$.

5.17. Выяснить, в каких точках кривой $y = \sin 2x$ касательная составляет с осью Ox угол $\pi/4$.

5.18. Выяснить, в какой точке кривой $y = 2x^3 - 1$ касательная составляет с осью Ox угол $\pi/3$.

5.19. Выяснить, в какой точке кривой $y = x^3/3 - x^2/2 - 7x + 9$ касательная составляет с осью Ox угол $-\pi/4$.

5.20. Выяснить, в каких точках кривой $y = x^3/3 - 5x^2/2 + 7x + 4$ касательная составляет с осью Ox угол $\pi/4$.

5.21. Найти точки на кривой $y = x^3/3 - 9x^2/2 + 20x - 7$, в которых касательные параллельны оси Ox.

5.22. Найти точку на кривой $y = x^4/4 - 7$, касательная в которой параллельна прямой $y = 8x - 4$.

5.23. Найти точку на кривой $y = -3x^2 + 4x + 7$, касательная в которой перпендикулярна к прямой $x - 20y + 5 = 0$.

5.24. Найти точку на кривой $y = 3x^2 - 4x + 6$, касательная в которой параллельна прямой $8x - y - 5 = 0$.

5.25. Найти точку на кривой $y = 5x^2 - 4x + 1$, касательная в которой перпендикулярна к прямой $x + 6y + 15 = 0$.

5.26. Найти точку на кривой $y = 3x^2 - 5x - 11$, касательная в которой параллельна прямой $x - y + 10 = 0$.

5.27. Найти точку на кривой $y=-x^2+7x+16$, касательная в которой параллельна прямой $y=3x+4$.

5.28. Выяснить, в какой точке кривой $y=4x^2-10x+$ $+13$ касательная параллельна прямой $y=6x-7$.

5.29. Выяснить, в какой точке кривой $y=7x^2-5x+4$ касательная перпендикулярна к прямой $23y+x-1=0$.

5.30. Выяснить, в какой точке кривой $y=x^2/4-7x+5$ касательная параллельна прямой $y=2x+5$.

6. Решить следующие задачи.

6.1. Траектория движения тела — кубическая парабола $12y=x^3$. В каких ее точках скорости возрастания абсциссы и ординаты одинаковы? (*Ответ*: (2, 2/3), (−2, −2/3).)

6.2. Закон движения материальной точки $s=3t^2/4-$ $-3t+7$. В какой момент времени скорость ее движения будет равна 2 м/с? (*Ответ*: 10/3 с.)

6.3. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x=4t^2-7$ и $x=3t^2-4t+38$. С какой скоростью эти точки удаляются друг от друга в момент встречи? (*Ответ*: 40 м/с или 26 м/с.)

6.4. Материальная точка движется по гиперболе $xy=12$ так, что ее абсцисса x равномерно возрастает со скоростью 1 м/с. С какой скоростью изменяется ордината точки, когда она проходит положение (6, 2)? (*Ответ*: −1/3 м/с.)

6.5. В какой точке параболы $y^2=4x$ ордината возрастает вдвое быстрее, чем абсцисса? (*Ответ*: (1/4, 1).)

6.6. Закон движения материальной точки $s=t^4-$ $-3t^2+2t-4$. Найти скорость движения точки в момент времени $t=2$ с. (*Ответ*: 22 м/с.)

6.7. Закон движения материальной точки $s=3t^4-$ $-t^3+4t^2+6$. Найти скорость ее движения в момент времени $t=2$ с. (*Ответ*: 100 м/с.)

6.8. Закон движения материальной точки $s=$ $=4\cos\left(\frac{t}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+6$. Найти ее скорость в момент времени $t=\pi$ с. (*Ответ*: −1 м/с.)

6.9. Закон движения материальной точки $s=$ $=4\sin\left(\frac{t}{3}+\frac{\pi}{6}\right)-8$. Найти ее скорость в момент времени $t=\pi/2$ с. (*Ответ*: 2/3 м/с.)

6.10. Закон движения материальной точки $s=$ $=-3\cos\left(\frac{t}{4}+\frac{\pi}{12}\right)+10$. Найти ее скорость в момент времени $t=\pi/3$ с. (*Ответ*: 3/8 м/с.)

6.11. Закон движения материальной точки $s = \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 7$. В какой момент времени ее скорость будет равна 42 м/с? (*Ответ*: 3 с.)

6.12. Закон движения материальной точки $s = 4t^3 - 2t + 11$. В какой момент времени ее скорость будет равна 190 м/с? (*Ответ*: 4 с.)

6.13. Закон движения материальной точки $s = \frac{5}{3}t^3 - 2t + 7$. Найти скорость ее движения в момент времени $t = 4$ с. (*Ответ*: 78 м/с.)

6.14. Закон движения материальной точки $s = 2t^5 - 6t^3 - 58$. Найти скорость ее движения в момент времени $t = 2$ с. (*Ответ*: 88 м/с.)

6.15. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 3t^2 - 8$ и $x = 2t^2 + 5t + 6$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи? (*Ответ*: 42 м/с, 33 м/с.)

6.16. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 5t^2 - t + 6$ и $x = 4t^2 + 18$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи? (*Ответ*: 39 м/с, 32 м/с.)

6.17. По оси Ox движутся две материальные точки, закоиы движения которых $x = \frac{4}{3}t^3 - 7t + 16$ и $x = t^3 + 2t^2 + 5t - 8$. В какой момент времеии их скорости окажутся равными? (*Ответ*: 6 с.)

6.18. Закон движения материальной точки $s = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 - 11t + 275$. В какой момент времени скорость ее движения будет равна 10 м/с? (*Ответ*: 7 с.)

6.19. Материальная точка движется по гиперболе $xy = 20$ так, что ее абсцисса равномерно возрастает со скоростью 1 м/с. С какой скоростью изменяется ее ордината, когда точка проходит положение (4, 5)? (*Ответ*: $-1{,}25$ м/с.)

6.20. В какой точке параболы $y^2 = 8x$ ордината возрастает вдвое быстрее, чем абсцисса? (*Ответ*: (1/2, 2).)

6.21. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 5t^2 + 2t + 6$ и $x = 4t^2 + 3t + 18$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи? (*Ответ*: 42 м/с или 35 м/с.)

6.22. В какой точке кривой $y^2 = 16x$ ордиата возрастает в четыре раза быстрее, чем абсцисса? (*Ответ*: (1/4, 2).)

6.23. В какой точке параболы $x^2 = 9y$ абсцисса возрастает вдвое быстрее, чем ордината? (*Ответ*: (9/4, 9/16).)

6.24. В какой точке параболы $x^2 = 10y$ абсцисса возрастает в пять раз быстрее, чем ордината? (*Ответ*: (1; 0,1).)

6.25. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 2t^3 - 2t^2 + 6t - 7$ и $x = \frac{5}{3}t^3 - t^2 + 14t + 4$. В какой момент времени их скорости будут равными? (*Ответ*: 4 с.)

6.26. Закон движения материальной точки по прямой задан формулой $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 30t + 18$. В какой момент времени скорость точки будет равна нулю? (*Ответ*: 6 с.)

6.27. Тело движется по прямой Ox по закону $x = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 10t - 16$. Определить скорость и ускорение движения тела. В какие моменты времени оно меняет направление движения? (*Ответ*: 2 с, 5 с.)

6.28. Зависимость между массой x кг вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x = 7(1 - e^{-4t})$. Определить скорость реакции в случае, когда $t = 0$ с. (*Ответ*: 28 кг/с.)

6.29. Материальная точка движется прямолинейно так, что $v^2 = 6x$, где v — скорость; x — пройденный путь. Определить ускорение движения точки в момент, когда скорость равна 6 м/с. (*Ответ*: 1/2 м/с^2.)

6.30. Закон движения материальной точки $s = 3t + t^3$. Найти скорость ее движения в момент времени $t = 2$с. (*Ответ*: 15 м/с.)

Решение типового варианта

1. Найти y' и y'', если $x^3y - y^2 = 6x$.

▶ Имеем равенство $3x^2y + x^3y' - 2yy' = 6$, откуда

$$y' = (6 - 3x^2y)/(x^3 - 2y).$$

Продифференцировав обе части предыдущего равенства, получим

$$6xy + 3x^2y' + 3x^2y' + x^3y'' - 2y'^2 - 2yy'' = 0,$$

откуда

$$y''(x^3 - 2y) = 2y'^2 - 6x^2y' - 6xy,$$

$$y''=2\frac{(6-3x^2y)^2}{(x^3-2y)^3}-6x^2\frac{6-3x^2y}{(x^3-2y)^2}-\frac{6xy}{x^3-2y}. \blacktriangleleft$$

2. Найти y' и y'', если

$$\left.\begin{array}{l}x=3t^4-t^2,\\ y=t^3-5.\end{array}\right\}$$

▶ Так как

$$\left.\begin{array}{l}x'=12t^3-2t,\\ y'=3t^2\end{array}\right\} \text{ и } \left.\begin{array}{l}x''=36t^2-2,\\ y''=6t,\end{array}\right\}$$

то

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3t^2}{12t^3-2t}=\frac{3t}{12t^2-2},$$

$$y''_x=\frac{y''_t x'_t-x''_t y'_t}{x_t'^3}=\frac{6t(12t^3-2t)-(36t^2-2)\cdot 3t^2}{(12t^3-2t)^3}=$$

$$=\frac{72t^4-12t^2-108t^4+6t^2}{(12t^3-2t)^3}=-\frac{3(6t^2+1)}{4t(6t^2-1)^3}. \blacktriangleleft$$

3. Найти $y'''\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если $y=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\cos^2 x$.

▶ Последовательно находим:

$$y'=\frac{1}{2}\cos x\cdot\sin x=\frac{1}{4}\sin 2x,$$

$$y''=\frac{1}{2}\cos 2x,\ y'''=-\sin 2x,$$

$$y'''(\pi/4)=-\sin(\pi/2)=-1. \blacktriangleleft$$

4. Записать формулу для производной n-го порядка, если $y=xe^x$.

▶ Имеем:

$$y'=e^x+xe^x,\ y''=e^x+e^x+xe^x=2e^x+xe^x.$$
$$y'''=2e^x+e^x+xe^x=3e^x+xe^x.$$

Сравнив полученные выражения для y', y'' и y''', запишем:

$$y^{(n)}=ne^x+xe^x. \blacktriangleleft$$

5. Записать уравнение касательной к кривой $y=x^2-9x-4$ в точке с абсциссой $x=-1$.

▶ Ордината точки касания $y(-1)=1+9-4=6$. В любой точке $y'=2x-9$. В точке касания $y'(-1)=-11$. Поэтому имеем уравнение касательной (по точке $(-1,\ 6)$ и угловому коэффициенту -11):

$$y-6=-11(x+1),\ y=-11x-5. \blacktriangleleft$$

6. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x_1 = \frac{t^3}{3} - 4$ и $x_2 = \frac{7}{2}t^2 - 12t + 3$ (x — в метрах, t — в секундах). В какой момент времени их скорости окажутся равными?

▶ Находим скорости обеих точек: $x_1' = t^2$, $x_2' = 7t - 12$. Так как $x_1' = x_2'$, то $t^2 = 7t - 12$, $t^2 - 7t + 12 = 0$, $t_1 = 3$ с, $t_2 = 4$ с. ◀

ИДЗ-6.3

Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя.

1

1.1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$.

1.2. $\lim\limits_{x\to0} \frac{a^{\ln x} - x}{x-1}$.

1.3. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

1.4. $\lim\limits_{x\to1} \frac{1 - 4\sin^2(\pi x/6)}{1 - x^2}$.

1.5. $\lim\limits_{x\to a} \arcsin\frac{x-a}{a} \cdot \operatorname{ctg}(x-a)$.

1.6. $\lim\limits_{x\to\infty} (\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x$.

1.7. $\lim\limits_{x\to\infty} (a^{1/x} - 1)x$.

1.8. $\lim\limits_{x\to1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right)$.

1.9. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 - \sin x^2}$.

1.10. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{2\sin x + x}$.

1.11. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{1/x^2} - 1}{2\operatorname{arctg} x^2 - \pi}$.

1.12. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$.

1.13. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$.

1.14. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^5}$.

1.15. $\lim\limits_{x\to1} \frac{1-x}{1 - \sin(\pi x/2)}$.

1.16. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

1.17. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{1 - \cos x}$.

1.18. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}$.

1.19. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \frac{1/\cos^2 x - 2\operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$.

1.20. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)}$.

1.21. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$.

1.22. $\lim\limits_{x\to0} (1 - \cos x)\operatorname{ctg} x$.

1.23. $\lim\limits_{x\to1} (1-x)\operatorname{tg}(\pi x/2)$.

1.24. $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin(3/x)$.

1.25. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$.

1.26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$.

1.27. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{1-\sin(\pi x/2)}$.

1.28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{4x - \sin x}$.

1.29. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

1.30. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sec^2 x - 2\operatorname{tg} x}{1+\cos 4x}$.

2

2.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 8x}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

2.2. $\lim\limits_{x\to \infty} x^4 \sin(a/x)$.

2.3. $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \cdot \ln(x-1)$.

2.4. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$.

2.5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$.

2.6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

2.8. $\lim\limits_{x\to \pi} (\pi - x)\ \operatorname{tg}(x/2)$.

2.9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

2.10. $\lim\limits_{x\to \pi/(2a)} \dfrac{1-\sin ax}{(2ax-\pi)^2}$.

2.11. $\lim\limits_{x\to \pi/6} \dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$.

2.12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$.

2.13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{c^x-1}$.

2.14. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1-x^3}$.

2.15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

2.16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$.

2.17. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{x^n-a^n}$.

2.18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$.

2.19. $\lim\limits_{x\to 0} (x\ln x)$.

2.20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

2.21. $\lim\limits_{x\to 0} (1-e^{2x})\ \operatorname{ctg} x$.

2.22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$.

2.23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^2 2x}$.

2.24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}$.

2.25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$.

2.26. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^5}$.

2.27. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}$.

2.28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(5x/2)}$.

2.29. $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos 2x) \operatorname{ctg} 4x$.

2.30. $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 \sin b/x)$.

3

3.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-x^2/2-x-1}{\cos x-x^2/2-1}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-1}{\operatorname{tg} x-x}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}(\pi x/2)}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\cos(\pi x/2)\cdot\ln(1-x)}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(e^{x^2}-1)}{\cos x-1}$.

3.10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$.

3.11. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$.

3.12. $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\dfrac{a}{6x}$.

3.13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\operatorname{tg} 4x-12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x-12\sin x}$.

3.14. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\sqrt{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

3.16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to\pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

3.19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$.

3.21. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

3.22. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-0{,}01x}$.

3.23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$.

3.24. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)^{\log_2 x}$.

3.25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{4/x^2}-1}{2\operatorname{arctg} x^2-\pi}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to 1/2} \ln 2x\cdot\ln(2x-1)$.

3.27. $\lim\limits_{x\to 1/2} \left(\dfrac{x}{3x-1}-\dfrac{1}{\ln 3x}\right)$.

3.28. $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x\cdot\operatorname{tg} x$.

3.29. $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3e^{-x})$.

3.30. $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)^{x-1}$.

4

4.1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 2x)^{\operatorname{ctg} x}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1/x))^{x}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to 0} x^{x}$.

4.5. $\lim\limits_{x\to \infty}(\ln 2x)^{1/\ln x}$.

4.6. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\ln x}$.

4.8. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x+e))^{1/x}$.

4.9. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

4.10. $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt[x]{x}$.

4.11. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

4.12. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos(\pi x/2)}$.

4.13. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{1/x}$.

4.14. $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$.

4.16. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$.

4.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

4.18. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x-4}{x+3}\right)^{3x}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

4.20. $\lim\limits_{x\to \infty}(\ln x)^{1/x}$.

4.21. $\lim\limits_{x\to \infty} x^{6/(1+2\ln x)}$.

4.22. $\lim\limits_{x\to \infty}(1-e^{x})^{1/x}$.

4.23. $\lim\limits_{x\to \infty}(x-1)^{1/\ln(2(x-1))}$.

4.24. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\cos\frac{m}{x}\right)^{x}$.

4.25. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} 2x)^{1/\ln x}$.

4.26. $\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{5}{x^2-x-20}\right)$.

4.27. $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\sin\frac{a}{x}$.

4.28. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$.

4.29. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos(\pi x/2)}$.

4.30. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

5

5.1. $\lim\limits_{x\to \infty} x(\ln(2+x)-\ln(x+1))$.

5.2. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\cos\frac{m}{x}+\lambda\sin\frac{m}{x}\right)^{x}$.

5.3. $\lim\limits_{x\to \infty}(x+2^{x})^{1/x}$.

5.4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

5.5. $\lim\limits_{x\to \infty}(\cos(m/\sqrt{x}))^{x}$.

5.6. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$.

5.7. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$.

5.8. $\lim\limits_{x\to a}(2-x/a)^{\operatorname{tg}(\pi x/(2a))}$.

5.9. $\lim\limits_{x\to 0} x^{1/\ln(e^x-1)}$.

5.10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{1/\sin x}$.

5.11. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^x$.

5.12. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$.

5.13. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

5.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$.

5.15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$.

5.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)$.

5.17. $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos(1/x)+\sin(1/x))^x$.

5.18. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{e^{1/(x-1)}}$.

5.19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{1/x^2}$.

5.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

5.21. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

5.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{2}{x}\right)^x$.

5.23. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

5.24. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin \pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

5.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$.

5.26. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$.

5.27. $\lim\limits_{x\to 0} x^{3/(4+\ln x)}$.

5.28. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

5.29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

5.30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

С помощью дифференциала приближенно вычислить данные величины и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой).

6

6.1. $\sqrt[5]{34}$.

6.2. $\sqrt[3]{26{,}19}$.

6.3. $\sqrt[4]{16{,}64}$.

6.4. $\sqrt{8{,}76}$.

6.5. $\sqrt[5]{31}$.

6.6. $\sqrt[3]{70}$.

6.7. $(2{,}01)^3+(2{,}01)^2$.

6.8. $\sqrt[3]{65}$.

6.9. $2{,}9/\sqrt{(2{,}9)^2+16}$.

6.10. $\sqrt{\dfrac{4-3{,}02}{1+3{,}02}}$.

6.11. $\sqrt[4]{15{,}8}$.

6.12. $\sqrt[3]{10}$.

6.13. $\sqrt[5]{200}$.

6.14. $(3{,}03)^5$.

6.15. $\sqrt{\frac{(2,037)^2-3}{(2,037)^2+5}}$. **6.16.** $\sqrt[7]{130}$.

6.17. $\sqrt[3]{27,5}$. **6.18.** $\sqrt{17}$.

6.19. $\sqrt{640}$. **6.20.** $\sqrt{1,2}$.

6.21. $\sqrt[10]{1025}$. **6.22.** $(3,02)^4+(3,02)^3$.

6.23. $(5,07)^3$. **6.24.** $(4,01)^{1,5}$.

6.25. $\sqrt[3]{1,02}$. **6.26.** $\cos 151°$.

6.27. $\operatorname{arctg} 1,05$. **6.28.** $\cos 61°$.

6.29. $\operatorname{tg} 44°$. **6.30.** $\operatorname{arctg} 0,98$.

7

7.1. $\arcsin 0,6$. **7.2.** $\operatorname{arctg} 0,95$. **7.3.** $e^{0,2}$.

7.4. $\lg 11$. **7.5.** $\arcsin 0,54$. **7.6.** $\cos 59°$.

7.7. $e^{2,01}$. **7.8.** $\ln \operatorname{tg} 46°$. **7.9.** $\operatorname{arctg}\sqrt{1,02}$.

7.10. $\operatorname{arctg}\sqrt{0,97}$. **7.11.** $\operatorname{arctg} 1,01$. **7.12.** $\ln(e^2+0,2)$.

7.13. $\operatorname{arctg} 1,03$. **7.14.** $\ln \operatorname{tg} 47°15'$. **7.15.** $\lg 9,5$.

7.16. $\operatorname{arctg}\sqrt{3,1}$. **7.17.** $2^{2,1}$. **7.18.** $4^{1,2}$.

7.19. $\operatorname{tg} 59°$. **7.20.** $\log_2 1,9$. **7.21.** $\operatorname{arctg}\sqrt{3,2}$.

7.22. $\operatorname{ctg} 29°$. **7.23.** $\sin 93°$. **7.24.** $\lg 1,5$.

7.25. $\sin 29°$. **7.26.** $\lg 101$. **7.27.** $\sin 31°$.

7.28. $\lg 0,9$. **7.29.** $e^{0,25}$. **7.30.** $\sqrt{15}$.

Решение типового варианта

Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt[5]{3x-1}}$.

▶ Так как под знаком предела числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности при $x\to\infty$, то приходим к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$*. Следовательно, можно применить правило Лопиталя. Имеем:

---

* При нахождении пределов условимся использовать следующие символические записи. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ при $x\to x_0$ или $x\to\pm\infty$ стремятся соответственно к 0 и 0, или к ∞ и ∞, или к 0 и ∞, или к 1 и ∞ и т. д., будем писать: $\lim\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{0}{0}$, или $\lim\frac{u}{v}=\frac{\infty}{\infty}$, или $\lim(uv)=0\cdot\infty$, или $\lim u^v=1^\infty$ и т. д.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt[5]{3x-1}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x/(x^2+1)}{3/\sqrt[5]{(3x-1)^4}}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[5]{(3x-1)^4}}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt[5]{(3x-1)^4}+x\cdot\frac{4}{5}(3x-1)^{-1/5}\cdot 3}{2x}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{15x-5+12x}{10x\sqrt[5]{3x-1}}=\frac{1}{15}\lim_{x\to\infty}\frac{27x-5}{x\sqrt[5]{3x-1}}=$$

$$=\frac{1}{15}\lim_{x\to\infty}\frac{27-5/x}{\sqrt[5]{3x-1}}=0. \blacktriangleleft$$

2. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

▶ При $x\to\pi/2$ получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{\operatorname{tg}^2 2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{2\operatorname{tg}2x\,\dfrac{2}{\cos^2 2x}}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos^3 2x\cdot\cos x}{4\sin 2x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to\pi/2}(-\cos^3 2x)\times$$

$$\times\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{4}\cdot 1\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{2\sin x}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}. \blacktriangleleft$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}4x}{e^{5x}-1}$.

▶ Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую раскрываем с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}4x}{e^{5x}-1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4/(1+16x^2)}{5e^{5x}}\right)=\frac{4}{5}. \blacktriangleleft$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{4+x^2}}-\dfrac{3}{\sqrt{16+x}-4}\right)$.

▶ Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Преобразуем ее к виду $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2-\sqrt{4+x^2}}-\frac{3}{\sqrt{16+x}-4}\right)=\infty-\infty=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{16+x}-4-6+3\sqrt{4+x^2}}{(2-\sqrt{4+x^2})(\sqrt{16+x}-4)}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1/(2\sqrt{16+x})+3x/\sqrt{4+x^2}}{-\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}(\sqrt{16+x}-4)+\frac{1}{2\sqrt{16+x}}(2-\sqrt{4+x^2})}=$$

$$=\frac{1/8}{0}=\infty. \blacktriangleleft$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-x+3}\right)^x.$

▶ Имеем неопределенность вида 1^∞. Введем обозначение $y=\left(\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-x-3}\right)^x$. Тогда

$$\ln y = x\ln\frac{x^2+3x-4}{x^2-x-3},$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x^2+3x-4}{x^2-x-3}}{1/x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-x-3}{x^2+3x-4}\cdot\frac{(2x+3)(x^2-x-3)-(2x-1)(x^2+3x-4)}{(x^2-x-3)^2}}{-1/x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}((-x^2(2x^3-2x^2-6x+3x^2-3x-9-2x^3-6x^2+$$

$$+8x+x^2+3x-4)/((x^2+3x-4)(x^2-x-3))^{-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2(-4x^2+2x-13)}{(x^2+3x-4)(x^2-x-3)}=4.$$

Так как

$$\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-x-3}\right)^x=4,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-x-3}\right)^x=e^4. \blacktriangleleft$$

С помощью дифференциала приближенно вычислить данные величины и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой).

6. $\sqrt[3]{84}.$

▶ Представим данную величину в виде $\sqrt[3]{84} = \sqrt[3]{4^3+20}$ и введем функцию $y=\sqrt[3]{x}$, где $x = x_0 + \Delta x$; $x_0 = 64$; $\Delta x = 20$. Воспользуемся формулой $y(x_0+\Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x$. Получим:

$$y(x_0) = \sqrt[3]{64} = 4, \ y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \ y'(64) = \frac{1}{3\cdot 16} = \frac{1}{48}.$$

Вычисляем

$$\sqrt[3]{84} \approx 4 + \frac{20}{48} = 4{,}42.$$

Относительная погрешность

$$\delta = \frac{4{,}42-4{,}3}{4{,}42} \cdot 100\,\% = 2{,}7\,\%. \ ◀$$

7. $\operatorname{arctg} 0{,}98$.

▶ Воспользуемся той же схемой:

$$y = \operatorname{arctg} x, \ x_0 = 1, \ \Delta x = 0{,}98 - 1 = -0{,}02,$$
$$y(x_0) = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4,$$
$$y' = \frac{1}{1+x^2}, \ y'(1) = 0{,}5, \ \operatorname{arctg} 0{,}98 \approx \pi/4 - 0{,}5\cdot 0{,}02 = 0{,}77,$$
$$\delta = \left|\frac{0{,}77-0{,}78}{0{,}77}\right| \cdot 100\,\% = 13\,\%. \ ◀$$

ИДЗ-6.4

1. Решить следующие задачи.

1.1. Полотняный шатер объемом V имеет форму прямого конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу его основания, чтобы на шатер пошло наименьшее количество полотна? (*Ответ*: $\sqrt{2}$.)

1.2. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α вписать параллелограмм наибольшей площадью так, чтобы одна из его сторон лежала на основании, а другая на боковой стороне треугольника. Найти длины сторон параллелограмма. (*Ответ*: $a/2$ и $a/(4\cos\alpha)$.)

1.3. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилнндра, имеющего при данном объеме V наимеиьшую полную поверхность. (*Ответ*: $H = 2R$.)

1.4. Требуется сделать коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наименьшим? (*Ответ*: $20\sqrt{3}/3$ см.)

1.5. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каково должно быть его основание, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим? (*Ответ*: $p/2$.)

1.6. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R. (*Ответ*: $4R/3$.)

1.7. Проволокой, длина которой l м, необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей? (*Ответ*: $l/4$ м.)

1.8. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в полукруг радиусом a. (*Ответ*: a^2.)

1.9. Бревно длиной 20 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны 2 м и 1 м. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна, а объем был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки? (*Ответ*: длина балки 40/3 м, сторона поперечного сечения $2\sqrt{2}/3$ м.)

1.10. С корабля, который стоит на якоре в 9 км от берега, нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км от ближайшей к кораблю точки берега. Скорость посыльного при движении пешком — 5 км/ч, а на лодке — 4 км/ч. В каком месте он должен пристать к берегу, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время? (*Ответ*: в 3 км от лагеря.)

1.11. Полоса жести шириной a, имеющая прямоугольную форму, должна быть согнута в виде открытого кругового цилиндрического желоба так, чтобы его сечение имело форму сегмента. Каким должен быть центральный угол φ, опирающийся на дугу этого сегмента, чтобы вместимость желоба была наибольшей? (*Ответ*: $\varphi = \pi$.)

1.12. Из круглого бревна диаметром d надо вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина b и высота h этого сечения, чтобы балка, будучи горизонтально расположенной и равномерно нагруженной, имела наименьший прогиб? (Величина прогиба обратно пропорциональна произведению ширины b поперечного сечения и куба высоты h.) (*Ответ*: $b = d/2$, $h = d\sqrt{3}/2$.)

1.13. Стоимость железнодорожной перевозки груза на 1 км (AB) равна k_1 р., а автомобильной (PC) — k_2 р.

($k_1 < k_2$). В каком месте P надо иачать строительство шоссе, чтобы возможно дешевле доставлять груз из пункта A в C? Известно, что $|AB| = a$, $|BC| = b$ (рис. 6.15). $\left(\text{\textit{Ответ}: на расстоянии } a - \frac{k_1 b}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}} \text{ от точки } A.\right)$

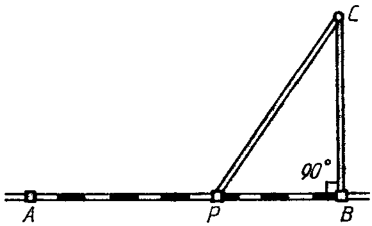


Рис. 6.15

1.14. Человеку нужно добраться из пункта A, находящегося на одном берегу реки, в пункт B на другом ее берегу. Зная, что скорость движения по берегу в k раз больше скорости движения по воде, определить, под каким углом человек должен пересечь реку, чтобы достичь пункта B в кратчайшее время. Ширина реки h, расстояние между пунктами A и B (вдоль берега) равно a. (*Ответ*: $\max(\arccos(1/k), \operatorname{arctg}(h/a))$.)

1.15. На прямолинейном отрезке AB, соединяющем два источника света: A (силой p) и B (силой q), найти точку M, освещаемую слабее всего, если $|AB| = a$. (Освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.) $\left(\text{\textit{Ответ}: на расстоянии } \frac{a\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}} \text{ от точки } A.\right)$

1.16. Лампа висит над центром круглого стола радиусом r. При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на его крае, будет наилучшей? (Освещениость прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.) (*Ответ*: $r/\sqrt{2}$.)

1.17. Из всех цилиндров, вписанных в данный конус, найти тот, у которого боковая поверхность наибольшая. Высота конуса H, радиус основания R. (*Ответ*: радиус основания цилиндра $R/2$, высота $H/2$.)

1.18. Из бумажного круга вырезан сектор, а из оставшейся его части склеена коническая воронка. Какой угол должен иметь вырезанный сектор, чтобы объем воронки был наибольшим? (*Ответ*: $2\pi\sqrt{2/3}$.)

1.19. Из всех конусов с данной боковой поверхностью S найти тот, у которого объем наибольший. (*Ответ*: радиус основания конуса $\sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}$, высота $\sqrt{\frac{S(3\pi-1)}{\pi\sqrt{3}}}$.)

1.20. Пункт B находится на расстоянии 60 км от железной дороги. Расстояние по железной дороге от пункта A до ближайшей к пункту B точки C составляет 285 км. На каком расстоянии от точки C надо построить станцию, от которой проложат шоссе к пункту B, чтобы затрачивать наименьшее время на передвижения между пунктами A и B, если скорость движения по железной дороге равна 52 км/ч, а скорость движения по шоссе — 20 км/ч. (*Ответ*: 25 км.)

1.21. Канал, ширина которого a м, под прямым углом впадает в другой канал шириной b м. Определить наибольшую длину бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов. (*Ответ*: $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$ м.)

1.22. Найти высоту прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара радиусом R. (*Ответ*: $8R$.)

1.23. При каком наклоне боковых сторон равнобедренной трапеции площадь ее будет наибольшей, если боковые стороны равны b, а меньшее основание a. (*Ответ*: $\cos\varphi = (\sqrt{a^2+8b^2}-a)/(4b)$.)

1.24. Из фигуры, ограниченной кривой $y=3\sqrt{x}$ и прямыми $x=4$, $y=0$, вырезать прямоугольник наибольшей площадью. (*Ответ*: $S=9{,}22$.)

1.25. Равнобедренный треугольник, вписанный в окружность радиусом R, вращается вокруг прямой, которая проходит через его вершину параллельно основанию. Какой должна быть высота этого треугольника, чтобы тело, полученное в результате его вращения, имело наибольший объем? (*Ответ*: $5R/3$.)

1.26. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак вместимостью V. Стоимость 1 м^2 материала, из которого изготавливается дно бака, составляет P_1 р., а стоимость 1 м^2 материала, идущего на стенки бака,— P_2 р. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материал будут минимальными? (*Ответ*: P_2/P_1.)

1.27. Сосуд с вертикальными стенками высотой H, наполненный невязкой жидкостью, стоит на горизонтальной плоскости. Определить местоположение отверстия, при котором дальность струи будет наибольшей, если скорость вытекающей жидкости по закону Торричелли равна $\sqrt{2gx}$, где x — расстояние от отверстия до поверхности жидкости; g — ускорение свободного падения. (*Ответ*: на середине высоты H.)

1.28. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен 15 м. При каком радиусе полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света? (*Ответ*: 2,1 м.)

1.29. На странице книги печатный текст занимает площадь S; ширина верхнего и нижнего полей равна a, а правого и левого — b. При каком отношении ширины к высоте текста площадь всей страницы будет наименьшей? (*Ответ*: b/a.)

1.30. Из круглого бревна, диаметр которого d, требуется вырезать балку прямоугольного поперечного сечения. Каковы должны быть ширина и высота этого сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление на изгиб? Сопротивление балки на изгиб Q пропорционально произведению ширины x ее поперечного сечения и квадрата его высоты y, т. е. $Q = kxy^2$, $k = \text{const}$. (*Ответ*: $x = d\sqrt{3}/3$, $y = d\sqrt{6}/3$.)

2. Провести полное нсследование указанных функций и построить их графики.

2.1. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

2.2. $y = \dfrac{x + 1}{(x - 1)^2}$.

2.3. $y = e^{1/(5+x)}$.

2.4. $y = x/(9 - x)$.

2.5. $y = \dfrac{4x - x^2 - 4}{x}$.

2.6. $y = \dfrac{x^2}{4x^2 - 1}$.

2.7. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

2.8. $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$:

2.9. $y = x - \ln(1 + x^2)$.

2.10. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - x + 1}$.

2.11. $y = x^2 - 2\ln x$.

2.12. $y = x^3 e^{-x^2/2}$.

2.13. $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$.

2.14. $y = \dfrac{(x - 2)^2}{x + 1}$.

2.15. $y = -\ln\dfrac{1 + x}{1 - x}$.

2.16. $y = \ln(x^2 + 1)$.

2.17. $y=\dfrac{x^2+6}{x^2+1}$.

2.18. $y=x\ln x$.

2.19. $y=(x-1)e^{3x+1}$.

2.20. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$.

2.21. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

2.22. $y=\dfrac{x^5}{x^4-1}$.

2.23. $y=(x^3+4)/x^2$.

2.24. $y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}(x-5)$.

2.25. $y=x^3/(x^4-1)$.

2.26. $y=(e^{2x}+1)/e^x$.

2.27. $y=x^2+1/x^2$.

2.28. $y=(5x^4+3)/x$.

2.29. $y=\dfrac{4-2x}{1-x^2}$.

2.30. $y=\dfrac{5x}{4-x^2}$.

3. Провести полное исследование данных функций и построить их графики.

3.1. $y=e^{2x-x^2}$.

3.2. $y=x+\ln(x^2-4)$.

3.3. $y=\dfrac{2(x+1)^2}{x-2}$.

3.4. $y=x\ln^2 x$.

3.5. $y=(4e^{x^2}-1)/e^{x^2}$.

3.6. $y=x^2e^{-x^2/2}$.

3.7. $y=xe^{1/x}$.

3.8. $y=\dfrac{2+x}{(x+1)^2}$.

3.9. $y=\dfrac{(1-x)^3}{(x-2)^2}$.

3.10. $y=xe^x$.

3.11. $y=x^2e^{1/x}$.

3.12. $y=x^2/(x+2)^2$.

3.13. $y=(x+2)e^{1-x}$.

3.14. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

3.15. $y=\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2$.

3.16. $y=\dfrac{x^3}{9-x^3}$.

3.17 $y=(x+1)e^{2x}$.

3.18. $y=4x/(4+x^2)$.

3.19. $y=x^4/(x^3-1)$.

3.20. $y=\ln(x^2-2x+6)$.

3.21. $y=\ln(1-1/x^2)$.

3.22. $y=x^3e^{x+1}$.

3.23. $y=x-\ln(1+x^2)$.

3.24. $y=1-\ln^3 x$.

3.25. $y=(x-1)e^{4x+2}$.

3.26. $y=\dfrac{2x^2+2+4x}{2-x}$.

3.27. $y=-x\ln^2 x$.

3.28. $y=x^2-2\ln x$.

3.29. $y=e^{1/(2-x)}$.

3.30. $y=\ln(4-x^2)$.

4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$.

4.1. $y=\ln(x^2-2x+2)$, $[0;\ 3]$.

4.2. $y=3x/(x^2+1)$, $[0;\ 5]$.

4.3. $y=(2x-1)/(x-1)^2$, $[-1/2;\ 0]$.

4.4. $y=(x+2)e^{1-x}$, $[-2;\ 2]$.
4.5. $y=\ln(x^2-2x+4)$, $[-1;\ 3/2]$.
4.6. $y=x^3/(x^2-x+1)$, $[-1;\ 1]$.
4.7. $y=((x+1)/x)^3$, $[1;\ 2]$.
4.8. $y=\sqrt{x-x^3}$, $[-2;\ 2]$.
4.9. $y=4-e^{-x^2}$, $[0;\ 1]$.
4.10. $y=(x^3+4)/x^2$, $[1;\ 2]$.
4.11. $y=xe^x$, $[-2;\ 0]$.
4.12. $y=(x-2)e^x$, $[-2;\ 1]$.
4.13. $y=(x-1)e^{-x}$, $[0;\ 3]$.
4.14. $y=x/(9-x^2)$, $[-2;\ 2]$.
4.15. $y=(1+\ln x)/x$, $[1/e;\ e]$.
4.16. $y=e^{4x-x^2}$, $[1;\ 3]$.
4.17. $y=(x^5-8)/x^4$, $[-3;\ -1]$.
4.18. $y=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$, $[-1;\ 2]$.
4.19. $y=x\ln x$, $[1/e^2;\ 1]$.
4.20. $y=x^3e^{x+1}$, $[-4;\ 0]$.
4.21. $y=x^2-2x+2/(x-1)$, $[-1;\ 3]$.
4.22. $y=(x+1)\sqrt[3]{x^2}$, $[-4/5;\ 3]$.
4.23. $y=e^{6x-x^2}$, $[-3;\ 3]$.
4.24. $y=(\ln x)/x$, $[1;\ 4]$.
4.25. $y=3x^4-16x^3+2$, $[-3;\ 1]$.
4.26. $y=x^5-5x^4+5x^3+1$, $[-1;\ 2]$.
4.27. $y=(3-x)e^{-x}$, $[0;\ 5]$.
4.28. $y=\sqrt{3}/2+\cos x$, $[0;\ \pi/2]$.
4.29. $y=108x-x^4$, $[-1;\ 4]$.
4.30. $y=x^4/4-6x^3+7$, $[16;\ 20]$.

Решение типового варианта

1. От канала шириной 32 м отходит под прямым углом другой канал шириной 4 м. Определить наибольшую длину бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов. (Толщину бревна не учитывать.)

▶ Обозначим длину бревна через l. Тогда:

$$l=|AC|=|AB|+|BC|,\ |AB|=\frac{|AE|}{\cos\varphi}=\frac{32}{\cos\varphi},$$

$$|BC|=\frac{|CD|}{\sin\varphi}=\frac{4}{\sin\varphi},\ l=\frac{32}{\cos\varphi}+\frac{4}{\sin\varphi}$$

(рис. 6.16).

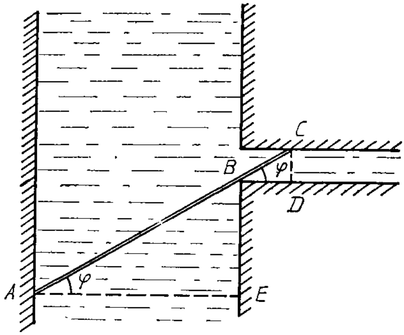


Рис. 6.16

Исследуем функцию l на экстремум:

$$l' = \frac{dl}{d\varphi} = \frac{32}{\cos^2\varphi}\sin\varphi - \frac{4}{\sin^2\varphi}\cos\varphi = \frac{32\sin^3\varphi - 4\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}.$$

Если $l' = 0$, то $32\sin^3\varphi - 4\cos^3\varphi = 0$. Так как $\cos\varphi \neq 0$, то из последнего уравнения имеем: $\operatorname{tg}^3\varphi = 1/8$, $\operatorname{tg}\varphi = 1/2$, $\sin\varphi = 1/\sqrt{5}$, $\cos\varphi = 2/\sqrt{5}$, $\varphi \approx 26°34'$. В окрестности этого значения φ знак производной l' определяется знаком ее числителя, т. е. выражения $u(\varphi) = 32\sin^3\varphi - 4\cos^3\varphi$. Имеем:

$$u(\varphi)|_{\varphi=26°} \approx 32\cdot 0{,}438^3 - 4\cdot 0{,}899^3 \approx 2{,}696 - 2{,}904 < 0,$$
$$u(\varphi)|_{\varphi=27°} \approx 32\cdot 0{,}454^3 - 4\cdot 0{,}891^3 \approx 2{,}994 - 2{,}829 > 0,$$

т. е.

$$l(\varphi)|_{\varphi=26°34'} = l_{\max}.$$

Следовательно, при $\varphi \approx 26°34'$ расстояние $|AC|$ будет минимальным, поэтому наибольшая длина $l_{\max}$ бревна, сплавляемого из одного канала в другой, не может быть больше этого расстояния. Окончательно получаем:

$$l_{\max} = 20\sqrt{5} \approx 44{,}72 \text{ м.} \blacktriangleleft$$

2. Провести полное исследование функции $y = (x+3)^2/(x-4)$ и построить ее график.

▶ Исследуем данную функцию, придерживаясь в основном схемы, предложенной в § 6.7.

1. Областью определения функции является множество $x \in (-\infty;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$.

2. Ордината точки графика $y > 0$ при $x > 4$, $y < 0$ при $x < 4$.

3. Точки пересечения графика данной функции с осями координат: $(0,\ -9/4)$ и $(-3,\ 0)$.

4. Легко находим, что $x=4$ — вертикальная асимптота, причем:

$$\lim_{x\to 4-0} y = \lim_{x\to 4-0} \frac{(x+3)^2}{x-4} = -\infty, \quad \lim_{x\to 4+0} y =$$
$$= \lim_{x\to 4+0} \frac{(x+3)^2}{x-4} = +\infty.$$

Находим наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+3)^2}{x(x-4)} = 1,$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{(x+3)^2}{x-4} - x\right) =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+6x+9-x^2+4x}{x-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{10x+9}{x-4} = 10.$$

Таким образом, существует единственная наклонная асимптота $y=x+10$.

5. Исследуем функцию на возрастание, убывание, локальный экстремум:

$$y' = \frac{2(x+3)(x-4)-(x+3)^2}{(x-4)^2} = \frac{2x^2-2x-24-x^2-6x-9}{(x-4)^2} =$$
$$= \frac{x^2-8x-33}{(x-4)^2}.$$

Из $y'=0$ следует $x^2-8x-33=0$, откуда $x_1=11$, $x_2=-3$. В интервале $(-\infty;\ -3)$ $y'>0$, следовательно, функция возрастает в этом интервале; в $(-3;\ 4)$ $y'<0$, т. е. функция убывает. Поэтому функция в точке $x=-3$ имеет локальный максимум: $y(-3)=0$. В интервале $(4;\ 11)$ $y'<0$, следовательно, функция убывает на этом интервале; в $(11;\ +\infty)$ $y'>0$, т. е. функция возрастает. В точке $x=11$ имеем локальный минимум: $y(11)=28$.

6. Исследуем график функции на выпуклость, вогнутость и определим точки перегиба. Для этого найдем

$$y'' = \frac{(2x-8)(x-4)^2-(x^2-8x-33)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} =$$
$$= \frac{2x^2-8x-8x+32-2x^2+16x+66}{(x-4)^3} = \frac{98}{(x-4)^3}.$$

Очевидно, что в интервале $(-\infty;\ 4)$ $y''<0$, и в этом интервале кривая выпукла; в $(4;\ +\infty)$ $y''>0$, т. е. в этом интервале кривая вогнута. Так как при $x=4$ функция не определена, то точка перегиба отсутствует.

7. График функции изображен на рис. 6.17. ◀

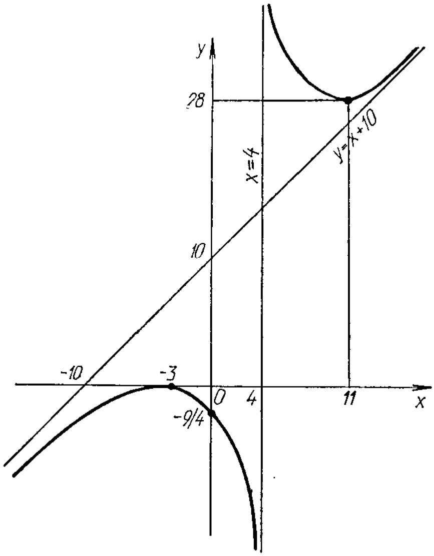


Рис. 6.17

3. Провести полное исследование функции $y = xe^{-x^2/2}$ и построить ее график.

▶ Воспользуемся общей схемой исследования функции.

1. Область определения функции $(-\infty;\ +\infty)$.

2. Так как $y=0$ при $x=0$, то график функции проходит через начало координат.

3. Функция принимает положительные значения в интервале $(0;\ +\infty)$ и отрицательные в интервале $(-\infty;\ 0)$.

4. Вертикальных асимптот нет. Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e^{x^2/2}} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{x^2/2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e^{x^2/2}} = 0.$$

Получаем горизонтальную асимптоту $y=0$.

5. Так как $y(-x) = -x/e^{x^2/2} = -y(x)$, то функция нечетна и ее график симметричен относительно начала координат.

6. Исследуем функцию на монотонность:

$$y' = \frac{e^{x^2/2} - xxe^{x^2/2}}{e^{x^2}} = \frac{e^{x^2/2}(1-x^2)}{e^{x^2}}.$$

Если $y'=0$, то $1-x^2=0$, откуда $x_1=-1$, $x_2=1$. Эти точки разбивают числовую ось на три интервала: в $(-\infty;\ -1)$ $y'<0$, и функция в этом интервале убывает; в $(-1;\ 1)$ $y'>0$ и функция возрастает; в $(1;\ +\infty)$ $y'<0$, и функция в этом интервале убывает. В точке $x=-1$ имеем минимум:

$$y(-1)=-\frac{1}{e^{1/2}}\approx -0{,}6,$$

а в точке $x=1$ — максимум:

$$y(1)=\frac{1}{e^{1/2}}\approx 0{,}6.$$

7. Исследуем свойства функции, связанные со второй производной:

$$y'=\frac{1-x^2}{e^{x^2/2}},\ y''=\frac{-2xe^{x^2/2}-(1-x^2)\,xe^{x^2/2}}{e^{x^2}}=$$

$$=\frac{xe^{x^2/2}(-2-1+x^2)}{e^{x^2}}=\frac{x(x^2-3)}{e^{x^2/2}}.$$

Если $y''=0$, то $x(x^2-3)=0$, откуда $x_1=0$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=\sqrt{3}$. В интервале $(-\infty;\ -\sqrt{3})$ $y''<0$, т. е. кривая выпукла в этом интервале; в $(-\sqrt{3};\ 0)$ $y''>0$, т. е. кривая вогнута; в $(0;\ \sqrt{3})$ $y''<0$, кривая выпукла; в $(\sqrt{3};\ +\infty)$ $y''>0$, кривая вогнута. Так как в точках $x=\pm\sqrt{3}$, $x=0$ вторая производная y'' меняет знак, то при этих значениях x на графике функции получаем точки перегиба, ординаты которых:

$$y(\pm\sqrt{3})=\pm\sqrt{3}/e^{3/2}\approx\pm 0{,}4,\ y(0)=0.$$

8. Полученные данные позволяют построить график функции (рис. 6.18).

4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=2\sin x+\cos 2x$ на отрезке $[0;\ \pi/2]$.

▶ Находим критические точки:

$$y'=2\cos x-2\sin 2x,$$

Если $y'=0$, то

$$2\cos x-4\sin x\cos x=0,\ 2\cos x\,(1-2\sin x)=0.$$

Если $\cos x=0$, то $x=\pi/2+2k\pi$; если же $\sin x=1/2$, то $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, k, $n\in\mathbf{Z}$.

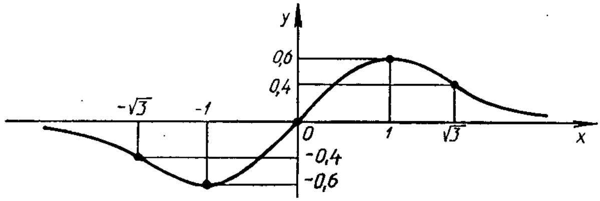


Рис. 6.18

Из всех найденных критических точек только $x=\pi/6$ и $x=\pi/2$ принадлежат отрезку $[0; \pi/2]$. Вычислим значения данной функции при $x=0$, $x=\pi/6$, $x=\pi/2$:

$$y(0)=1,\ y\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{2}=1{,}5,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}+\cos\pi=2-1=1.$$

Следовательно, наибольшего значения на отрезке $[0; \pi/2]$ данная функция достигает в точке $x=\pi/6$: $y(\pi/6)=1{,}5$, а наименьшего — в точках $x=0$ и $x=\pi/2$: $y(0)=y(\pi/2)=1$. ◀

6.11. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 6

1. Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются графики следующих функций:

а) $f(x)=x^3$, $g(x)=1/x^2$; б) $f(x)=x^2-4x+4$, $g(x)=-x^2+6x-4$. (*Ответ*: а) (1, 2), $\varphi=\pi/4$; б) (1, 1), (4, 4), $\varphi=\operatorname{arctg}(6/7)$.)

2. Записать в декартовых и полярных координатах уравнение нормали к кардиоиде $\rho=a(1+\cos\varphi)$ в точке с полярным углом $\varphi=\pi/6$. (*Ответ*: $x-y-\left(1+2\sqrt{3}\right)a/4=0$, $\rho=\left(1+2\sqrt{3}\right)a/(4(\cos\varphi-\sin\varphi))$.)

3. Тело массой $m=1{,}5$ кг движется прямолинейно по закону $s(t)=t^2+t+1$ (s — в метрах, t — в секундах). Найти кинетическую энергию тела через 5 с после начала движения. (*Ответ*: 90,75 Дж.)

4. Материальная точка движется по спирали Архимеда $\rho=a\varphi$ так, что угловая скорость вращения ее полярного радиуса постоянна и равна $\pi/30$ рад/с. Определить скорость удлинения полярного радиуса ρ, если $a=10$ м. (*Ответ*: $\pi/3$ м/с.)

5. Количество теплоты Q Дж, необходимое для нагревания 1 кг воды от 0 до t °C, определяется формулой

$Q = t + 2 \cdot 10^{-5} t^2 + 3 \cdot 10^{-7} t^3$. Определить теплоемкость воды при $t = 100$ °С. (*Ответ*: 1,013 Дж/(кг · град).)

6. Камень брошен с заданной начальной скоростью под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, при каком значении α дальность полета камня будет наибольшей. (*Ответ*: $\pi/4$.)

7. Внутреннее сопротивление гальванического элемента равно R Ом. При каком внешнем сопротивлении мощность тока, получаемого от этого элемента во внешней цепи, будет наибольшей? (*Ответ*: R Ом.)

8. Исследовать данные функции и построить их графики:

а) $x = t^3 + 2t^2 + t,\ y = -3t^3 + 3t - 2$;

б) $x = (t-1)^2 (t-2),\ y = (t-1)^2 (t-3)$;

в) $x^3 - y^3 = 1$; г) $y^2 (2 - x) = x^3$.

9. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x \to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$; б) $\lim\limits_{x \to a} (2 - x/a)^{\operatorname{tg}(\pi x/(2a))}$;

в) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right)$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} x^{\sin x}$.

(*Ответ*: а) e^{-1}; б) e^{π}; в) $1/12$; г) 1.)

10. Использовав разложение функций по формуле Маклорена, найти предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}. \quad (\textit{Ответ}:\ -1/12.)$$

11. Для осушения болот надо вырыть открытый канал, поперечное сечение которого — равнобедренная трапеция. Канал должен быть устроен так, чтобы при движении воды потери на трение были наименьшими. Определить величину угла откоса α, при котором эти потери будут наименьшими, если площадь поперечного сечения канала S, а глубина h. (*Ответ*: $\alpha = \pi/6$.)

12. Сечение шлюзового канала имеет форму прямоугольника, заканчивающегося полукругом. Периметр сечения равен 45 м. При каком радиусе полукруга сечение будет иметь наибольшую площадь? $\left(\textit{Ответ}: \dfrac{45}{4+\pi} \text{ м.}\right)$

13. Вода вытекает через отверстие в толстой стене. При этом секундный расход воды определяется по формуле $Q = cy\sqrt{h - y}$, где c — некоторая положительная постоянная; y — диаметр отверстия; h — глубина его низшей точки. Определить, при каком диаметре отверстия y секундный расход воды Q будет наибольшим. $\left(\text{Ответ: } \frac{2}{3}h.\right)$

14. Найти наименьшую длину стрелы крана, необходимую для монтажа плит перекрытия здания высотой H и шириной a, при условии, что кран может двигаться вдоль фасада здания параллельно ему, высота основания стрелы крана над землей h, зазор между стеной здания и стрелой крана всегда не менее m. Кран должен подавать детали так, чтобы крюк его приходился точно над серединой здания. Решить задачу в общем виде, сделать расчет при $H = 125$ м, $m = 15$ м, $a = 10$ м, $h = 116$ м. (*Ответ*: 23,3 м.)

15. По трубе круглого сечения радиусом r течет вода. Известно, что скорость течения прямо пропорциональна так называемому гидравлическому радиусу R, вычисляемому по формуле $R = S/p$, где S — площадь сечения потока воды по трубе; p — смоченный (подводный) периметр сечения трубы. При каком центральном угле заполнения трубы водой скорость течения воды будет наибольшей? (*Ответ*: 258°.)

16. Показать, что точка максимума момента изгиба равномерно нагруженного бруса длиной l находится в центре бруса. (Момент изгиба бруса в точке M задается формулой $M = \frac{1}{2}lx - \frac{1}{2}\omega x^2$, где ω — удельная нагрузка; x — расстояние от точки до начала бруса.)

17. Однородный стержень AB, который может вращаться около точки A, несет груз Q на расстоянии s от точки A и удерживается в равновесии вертикальной силой P, приложенной к свободному концу B стержня. Вес погонного сантиметра стержня q. Определить длину стержня, при которой вертикальная сила P будет наименьшей. $\left(\text{Ответ: } |AB| = \sqrt{2sQ/q},\ P_{\text{наим}} = \sqrt{2sqQ}.\right)$

18. Определить приблизительно (с точностью до целого числа) относительную погрешность при вычислении поверхности сферы, если при определении ее радиуса относительная погрешность составила 1 %. (*Ответ*: 2 %.)

19. Определить приблизительно (в процентах, с точностью до целого числа) изменение силы тока проводника, если его сопротивление увеличивается на 1 %. (*Ответ*: уменьшится на 1 %.)

20. Как следует изменить длину маятника $l = 20$ см, чтобы период его колебаний T увеличился на 0,05 с? (Период $T = 2\pi\sqrt{l/q}$.) (*Ответ*: увеличить на 2,23 см.)

21. Найти координаты центра кривизны (параметрические уравнения эволют) данных линий в произвольной точке:

а) гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

б) астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

(*Ответ*: а) $\xi = (a^2 + b^2)x^3/a^4$, $\eta = -(a^2 + b^2)y^3/b^4$; б) $\xi = x + 3x^{1/3}y^{2/3}$, $\eta = y + 3x^{2/3}y^{1/3}$.)

22. Вычислить наибольшее значение радиуса кривизны линии $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$. $\left(\textit{Ответ}: \frac{3}{4}a.\right)$

23. Найти уравнение окружности кривизны линии $y = e^x$ в точке (0, 1). (*Ответ*: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 8$.)

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Контрольная работа «Векторная алгебра» (2 часа)

1

Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Положив $\overrightarrow{AK} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AL} = \mathbf{b}$, выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ указанные векторы.

1.1. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$. **1.2.** $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$. **1.3.** $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BL}$.
1.4. $\overrightarrow{KD}$, $\overrightarrow{KL}$. **1.5.** $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{DL}$. **1.6.** $\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{BA}$.
1.7. $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$. **1.8.** $\overrightarrow{LB}$, $\overrightarrow{LC}$. **1.9.** $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{KB}$.
1.10. $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DA}$.

В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ со стороной, равной 2, из вершины A выходят единичные векторы $\mathbf{m}$ по направлению $\overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{n}$ по направлению $\overrightarrow{AF}$. Выразить через $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ указанные векторы.

1.11. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EC}$. **1.12.** $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DF}$. **1.13.** $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DF}$.
1.14. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE}$. **1.15.** $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$. **1.16.** $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{AE}$.
1.17. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CF}$. **1.18.** $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{FC}$. **1.19.** $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$.
1.20. $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{FB}$.

Дан тетраэдр $OABC$. Положив $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, выразить через $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ указанные векторы (точки M, P и R — середины ребер OA, OB и OC, а N, Q и S — середины противоположных ребер).

1.21. $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MC}$. **1.22.** $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PA}$. **1.23.** $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{RB}$.
1.24. $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{NO}$. **1.25.** $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{OQ}$. **1.26.** $\overrightarrow{SR}$, $\overrightarrow{OS}$.
1.27. $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{CS}$. **1.28.** $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{CM}$. **1.29.** $\overrightarrow{NQ}$, $\overrightarrow{BR}$.
1.30. $\overrightarrow{RN}$, $\overrightarrow{MB}$.

2

Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

2.1. $\mathbf{a} = -2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.
2.2. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.
2.3. $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$.
2.4. $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.
2.5. $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.
2.6. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.
2.7. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.
2.8. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
2.9. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.
2.10. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

Параллелограмм построен на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Найти его высоту, опущенную на сторону, совпадающую с вектором $\mathbf{a}$.

2.11. $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
2.12. $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
2.13. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.
2.14 $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.
2.15. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.
2.16. $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$.
2.17. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
2.18. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.
2.19. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.
2.20. $\mathbf{a} = 11\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

Найти $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, если $|\mathbf{a}| = \mathbf{k}$, $|\mathbf{b}| = l$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = p$.

2.21. $k = \sqrt{29}$, $l = \sqrt{61}$, $p = 36$. 2.22. $k = \sqrt{74}$, $l = \sqrt{20}$, $p = 20$.
2.23. $k = \sqrt{45}$, $l = \sqrt{14}$, $p = 5$. 2.24. $k = \sqrt{33}$, $l = \sqrt{59}$, $p = 25$.
2.25. $k = \sqrt{46}$, $l = \sqrt{38}$, $p = -24$. 2.26. $k = \sqrt{30}$, $l = \sqrt{29}$, $p = -28$.
2.27. $k = \sqrt{50}$, $l = \sqrt{14}$, $p = -23$. 2.28. $k = \sqrt{45}$, $l = \sqrt{21}$, $p = 20$.
2.29. $k = \sqrt{53}$, $l = \sqrt{30}$. $p = 12$. 2.30. $k = \sqrt{98}$, $l = \sqrt{21}$, $p = 10$.

3

Найти проекцию вектора $\mathbf{c}$ на направление вектора $\mathbf{d}$.

3.1. $\mathbf{c} = (-2, 0, 1)$, $\mathbf{d} = (1, 2, -3)$. 3.2. $\mathbf{c} = (4, -5, 1)$, $\mathbf{d} = (3, 2, -4)$.
3.3. $\mathbf{c} = (2, -8, 1)$, $\mathbf{d} = (-3, -1, 2)$. 3.4. $\mathbf{c} = (-4, 5, 2)$, $\mathbf{d} = (3, 4, -6)$.
3.5. $\mathbf{c} = (9, 5, -4)$, $\mathbf{d} = (3, 2, 6)$. 3.6. $\mathbf{c} = (3, -4, 11)$. $\mathbf{d} = (-2, 5, 3)$.
3.7. $\mathbf{c} = (3, 7, -5)$, $\mathbf{d} = (1, 4, -9)$. 3.8. $\mathbf{c} = (3, -6, 5)$, $\mathbf{d} = (1, 4, 4)$.
3.9. $\mathbf{c} = (-7, -5, 1)$, $\mathbf{d} = (3, 4, -2)$, 3.10. $\mathbf{c} = (5, 4, -1)$, $\mathbf{d} = (2, -4, 6)$.

Вектор $\mathbf{x}$, коллинеарный вектору $\mathbf{a}$, образует острый угол с осью Oz. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$, если $|\mathbf{x}| = t$.

3.11. $\mathbf{a} = (4, -7, 1)$, $t = \sqrt{264}$. 3.12. $\mathbf{a} = (5, -3, -1)$, $t = \sqrt{315}$.
3.13. $\mathbf{a} = (4, 5, -6)$, $t = \sqrt{308}$. 3.14. $\mathbf{a} = (3, -5, 7)$, $t = \sqrt{1328}$.
3.15. $\mathbf{a} = (4, -2, 2)$, $t = 10\sqrt{6}$. 3.16. $\mathbf{a} = (5, 6, -7)$, $t = 3\sqrt{110}$.
3.17. $\mathbf{a} = (5, -3, 9)$, $t = 2\sqrt{115}$. 3.18. $\mathbf{a} = (5, -3, 1)$, $t = 5\sqrt{35}$.
3.19. $\mathbf{a} = (7, -4, 2)$, $t = 4\sqrt{69}$. 3.20. $\mathbf{a} = (3, -1, 7)$, $t = 6\sqrt{59}$.

Вектор $\mathbf{x}$, перпендикулярный к векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, образует с осью Oy тупой угол. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$, если $|\mathbf{x}| = p$.

3.21. $\mathbf{a} = (4, 2, -2)$, $\mathbf{b} = (5, 1, -3)$, $p = \sqrt{15}$.
3.22. $\mathbf{a} = (7, 5, 2)$, $\mathbf{b} = (0, 4, 3)$, $p = \sqrt{26}$.
3.23. $\mathbf{a} = (4, 3, -1)$, $\mathbf{b} = (3, 4, 8)$, $p = \sqrt{42}$.
3.24. $\mathbf{a} = (2, 0, 2)$, $\mathbf{b} = (4, -6, 0)$, $p = \sqrt{22}$.
3.25. $\mathbf{a} = (3, 4, -1)$, $\mathbf{b} = (4, 6, -4)$, $p = \sqrt{42}$.
3.26. $\mathbf{a} = (4, 6, 5)$, $\mathbf{b} = (-4, 2, 7)$, $p = \sqrt{17}$.
3.27. $\mathbf{a} = (-2, 7, 10)$, $\mathbf{b} = (0, 3, 4)$, $p = \sqrt{26}$.
3.28. $\mathbf{a} = (-1, 9, 2)$, $\mathbf{b} = (14, -1, -3)$, $p = \sqrt{27}$.
3.29. $\mathbf{a} = (4, 5, 8)$, $\mathbf{b} = (5, 2, -7)$, $p = \sqrt{26}$.
3.30. $\mathbf{a} = (12, 3, -2)$, $\mathbf{b} = (11, 7, 1)$, $p = \sqrt{56}$.

4

Найти угол между векторами **a** и **b** при указанных условиях.

4.1. $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2 = 20$.

4.2. $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$, $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} + 4\mathbf{b})^2 = 69$.

4.3. $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 1$, $(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - 5\mathbf{b})^2 = 189$.

4.4. $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 5$, $(\mathbf{a} - 3\mathbf{b})^2 + (2\mathbf{a} + 4\mathbf{b})^2 = 595$.

4.5. $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 4$, $(4\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 - (3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})^2 = 77$.

4.6. $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 3$, $(2\mathbf{a} - 5\mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2 = 93$.

4.7. $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 1$, $(\mathbf{a} - 8\mathbf{b})^2 - (2\mathbf{a} + 3\mathbf{b})^2 = 31$.

4.8. $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 4$, $(3\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} + 6\mathbf{b})^2 = 0$.

4.9. $|\mathbf{a}| = 7$, $|\mathbf{b}| = 2$, $(\mathbf{a} + 4\mathbf{b})^2 + (3\mathbf{a} - 7\mathbf{b})^2 = 274$.

4.10. $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 6$, $(5\mathbf{a} - 2\mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} + 3\mathbf{b})^2 = 270$.

Найти угол между векторами **m** и **n**, если $|\mathbf{m}| = |\mathbf{n}| = 1$ и указанные векторы **a** и **b** взаимно перпендикулярны.

4.11. $\mathbf{a} = 5\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$, $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$.

4.12. $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$, $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$.

4.13. $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$.

4.14. $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$.

4.15. $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$.

4.16. $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$, $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 4\mathbf{n}$.

4.17. $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$, $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$.

4.18. $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$, $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$.

4.19. $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$, $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$.

4.20. $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$, $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$.

Выяснить, для каких векторов **a** и **b** выполняются данные условия.

4.21. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.

4.22. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$.

4.23. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

4.24. $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.

4.25. $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| = 0$.

4.26. $\mathbf{a}/|\mathbf{a}| = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$.

4.27. $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.

4.28. $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,\mathbf{b}$.

4.29. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

4.30. $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.

5

Выяснить, при каком значении α векторы **a**, **b** и **c** будут компланарны.

5.1. $\mathbf{a} = (3, -1, 4)$, $\mathbf{b} = (2, \alpha, -5)$, $\mathbf{c} = (1, 0, 2)$.

5.2. $\mathbf{a} = (4, -2, \alpha)$, $\mathbf{b} = (-5, 1, 3)$, $\mathbf{c} = (2, 4, -3)$.

5.3. $\mathbf{a} = (3, -1, 4)$, $\mathbf{b} = (1, -4, 0)$, $\mathbf{c} = (\alpha, 3, 2)$.

5.4. $\mathbf{a} = (\alpha, 2, -5)$, $\mathbf{b} = (3, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (4, -1, 0)$.

5.5. $\mathbf{a} = (-1, 5, -7)$, $\mathbf{b} = (4, 2, \alpha)$, $\mathbf{c} = (3, 5, 1)$.

5.6. $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (4, -2, 1)$, $\mathbf{c} = (\alpha, -3, -2)$.

5.7. $\mathbf{a} = (4, -5, 3)$, $\mathbf{b} = (2, \alpha, -1)$, $\mathbf{c} = (1, 5, 6)$.

5.8. $\mathbf{a} = (3, -2, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -5, 2)$, $\mathbf{c} = (\alpha, 4, -1)$.

5.9. $\mathbf{a} = (2, -3, 5)$, $\mathbf{b} = (1, -4, \alpha)$, $\mathbf{c} = (2, 1, -3)$.

5.10. $\mathbf{a} = (1, 1, \alpha)$, $\mathbf{b} = (-3, 3, 1)$. $\mathbf{c} = (2, 3, -3)$.

Найти объем пирамиды, построенной на векторах **a**, **b** и **c**.

5.11. $\mathbf{a} = (5, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (2, 5, 0)$, $\mathbf{c} = (1, 2, 4)$.

5.12. $\mathbf{a} = (-12, 2, -4)$, $\mathbf{b} = (-4, 2, 3)$, $\mathbf{c} = (-3, 4, -3)$.

5.13. $\mathbf{a} = (0, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{c} = (3, 2, 0)$.

5.14. $\mathbf{a} = (-5, 6, -8)$, $\mathbf{b} = (-2, -3, 1)$, $\mathbf{c} = (-3, 1, 1)$.

5.15. $\mathbf{a} = (4, 4, -6)$, $\mathbf{b} = (1, 3, 1)$, $\mathbf{c} = (0, -2, 0)$.

5.16. $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 2)$, $\mathbf{c} = (-1, 1, -2)$.

5.17. $\mathbf{a} = (-1, 3, 3)$, $\mathbf{b} = (0, 4, 2)$, $\mathbf{c} = (3, 3, -4)$.

5.18. $\mathbf{a} = (-3, 6, 2)$, $\mathbf{b} = (-4, -1, -5)$, $\mathbf{c} = (1, 0, 5)$.

5.19. $\mathbf{a} = (3, -2, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 4, 0)$, $\mathbf{c} = (5, 2, 3)$.

5.20. $\mathbf{a} = (-3, 0, -2)$, $\mathbf{b} = (-1, -1, 3)$, $\mathbf{c} = (-4, -1, 0)$.

Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b** и **c**, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах **a** и **b**.

5.21. $\mathbf{a}=(2,\ 3,\ -1)$, $\mathbf{b}=(-2,\ 4,\ 5)$, $\mathbf{c}=(3,\ -1,\ 4)$.
5.22. $\mathbf{a}=(3,\ 6,\ -8)$, $\mathbf{b}=(-2,\ 4,\ -6)$, $\mathbf{c}=(5,\ 2,\ -1)$.
5.23. $\mathbf{a}=(-4,\ 5,\ -4)$, $\mathbf{b}=(-4,\ 0,\ 2)$, $\mathbf{c}=(-3,\ 3,\ -5)$.
5.24. $\mathbf{a}=(-1,\ -2,\ 5)$, $\mathbf{b}=(-4,\ -2,\ 5)$, $\mathbf{c}=(1,\ -3,\ -2)$.
5.25. $\mathbf{a}=(2,\ -1,\ 1)$, $\mathbf{b}=(-3,\ 0,\ 4)$, $\mathbf{c}=(0,\ 4,\ 3)$.
5.26. $\mathbf{a}=(-2,\ 5,\ 5)$, $\mathbf{b}=(-2,\ 1,\ -1)$, $\mathbf{c}=(-5,\ 1,\ 5)$.
5.27. $\mathbf{a}=(-2,\ 3,\ 0)$, $\mathbf{b}=(-2,\ 0,\ 6)$, $\mathbf{c}=(0,\ 3,\ -2)$.
5.28. $\mathbf{a}=(4,\ -6,\ 4)$, $\mathbf{b}=(4,\ -1,\ 2)$, $\mathbf{c}=(3,\ 2,\ 7)$.
5.29. $\mathbf{a}=(-12,\ 2,\ -4)$, $\mathbf{b}=(-4,\ 2,\ 3)$, $\mathbf{c}=(-3,\ 4,\ -3)$.
5.30. $\mathbf{a}=(5,\ 2,\ 0)$, $\mathbf{b}=(2,\ 5,\ 0)$, $\mathbf{c}=(1,\ 2,\ 4)$.

2. Контрольная работа «Пределы» (1 час)

Найти пределы.

1

1.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2+4x+1}$.

1.2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-2}$.

1.3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-5x+1}$.

1.4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x-4}$.

1.5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x+5}$.

1.6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^2-3x-5}$

1.7. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2+2x-3}$.

1.8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x+1}$.

1.9. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x^2+5x+2}$.

1.10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-3}{x^2-4}$.

1.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$.

1.12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$.

1.13. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$.

1.14. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x+5}{x^2-6x+5}$.

1.15. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$.

1.16. $\lim\limits_{m\to 3}\dfrac{3m^2-5m-3}{m^2-5m+6}$.

1.17. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$.

1.18. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$.

1.19. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x^2-17x-28}{x^2-9x+14}$.

1.20. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-8x-3}{x^2-x-6}$.

1.21. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-6}$.

1.22. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$.

1.23. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$.

1.24. $\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{2t^2-5t-7}{3t^2+t-2}$.

1.25. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2+7x-15}$.

1.26. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+9x+4}{x^2-x-20}$.

1.27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$.

1.28. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+5x+2}$.

1.29. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-x-12}{x^2-2x-8}$.

1.30. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$.

2

2.1. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+3x-2}{3x^2+2x-8}$.

2.2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-5x+2}{2x^2-x-1}$.

2.3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{10x-3x^2-8}{3x^2-8x+4}$.

2.4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-3}{x^2-3x-4}$.

2.5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{7x-x^2-12}{2x^2-11x+15}$.

2.6. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{3-8x-3x^2}{x^2+x-6}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x^2-17x+35}{x^2-x-20}$.

2.8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{4-3x^2-x}$.

2.9. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-16x+1}{3x^2+5x-2}$.

2.10. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$

2.11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+x-3}{3x^2+x+2}$.

2.12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^2+2x-3}{x^2+x-2}$.

2.13. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x^2+10x+5}{x^2-2x-3}$.

2.14. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2+6x+5}$.

2.15. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2-6x+2}{x^2+5x+6}$.

2.16. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{4x^2+9x+2}{x^2-3x-10}$.

2.17. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{5x^2+4x+1}{x^2-6x-7}$.

2.18. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+x-6}{2x^2+3x-7}$.

2.19. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-4x-3}$.

2.20. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-7x-18}$.

2.21. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-x-12}{x^2-4x+3}$.

2.22. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2-7x-2}{x^2-7x+10}$.

2.23. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-x-12}{x^2+16}$.

2.24. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2+x+4}{2x^2+x-3}$.

2.25. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-3x+2}{4x-3x^2-1}$.

2.26. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2+x-2}{x^2-2x+3}$.

2.27. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2+3x-1C4}{3x^2-7x+2}$.

2.28. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-10x+8}{2x^2-3x-2}$.

2.29. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2-2x-5}{x^2+5x+4}$.

2.30. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-3x-9}{3x^2-5x-10}$.

3

3.1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{3-2x}-3}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{9-x^2}-3}$.

3.4. $\lim\limits_{z\to -2} \dfrac{\sqrt{z+6}-2}{z^2-4}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-x}-3}{\sqrt{x+4}-2}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{2-\sqrt{x+1}}$.

3.9. $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{\sqrt{n^2+9}-3}{\sqrt{4-n^2}-2}$.

3.10. $\lim\limits_{m\to 4}\dfrac{5-\sqrt{m^2+9}}{\sqrt{2m+1}-3}$.

3.11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2-9}$.

3.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$.

3.13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{x^2-2x}$.

3.14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{4x+1}-3}$.

3.16. $\lim\limits_{b\to 5}\dfrac{\sqrt{b-1}-2}{\sqrt{2b-1}-3}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+3}$.

3.18. $\lim\limits_{a\to 2}\dfrac{\sqrt{3a+10}-4}{a^2-4}$.

3.19. $\lim\limits_{m\to 3}\dfrac{9-m^2}{\sqrt{4m-3}-3}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{\sqrt{2x+11}-5}$

3.21. $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3z^2}-2}{z^2-z}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{\sqrt{x+1}-2}$.

3.23. $\lim\limits_{t\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3t}-\sqrt{2t+6}}{t^2-5t}$.

3.24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{2x}-2}$.

3.25. $\lim\limits_{m\to 4}\dfrac{\sqrt{6m+1}-5}{\sqrt{m}-2}$.

3.26. $\lim\limits_{z\to 3}\dfrac{\sqrt{z-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2z+3}-3}$.

3.27. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$.

3.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$.

3.29. $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{\sqrt{3-n}-\sqrt{3+n}}{5n}$.

3.30. $\lim\limits_{a\to 4}\dfrac{a-4}{\sqrt{5a+5}-5}$.

4

4.1. $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{2a^3-a+1}{a^2+2a-5}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+x-4}$.

4.3. $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{2z^3+3z-1}{2z^3+z^2-4}$.

4.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+1}{n^2+2n-3}$.

4.5. $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{3m^3+2m-5}{m^4+5m^2-1}$.

4.6. $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{2z^2+z-3}{z^2+3z+1}$.

4.7. $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{3a^2-4a+1}{a^3+3a-4}$.

4.8. $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{m^3-8m+1}{3m^3-m+4}$.

4.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4n+1}{2n^2+n-3}$.

4.10. $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{2-3z-z^2}{2z^3+z-1}$.

4.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4n^5+1}{2n^5+3n^3-n}$.

4.12. $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{4a^3+3a^2-1}{2a^3-3a+1}$.

4.13. $\lim\limits_{y\to-\infty}\dfrac{y^6-3y^2-2}{2y^6+4y+5}$.

4.14. $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{6z^5-3z^2+1}{3z^5-2z+3}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-4x^2+5}{3x^4+2x^2-x}$.

4.16. $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{a^4-3a^2+2}{5a^4-3a-2}$.

4.17. $\lim\limits_{b\to-\infty}\dfrac{9b^5-4b^3+2}{3b^4-2b+3}$.

4.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^3-2x^2-1}$.

4.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^5-3n^2+1}{2n^5-2n+3}$.

4.20. $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{9z^3-4z^2+1}{6z^3+3z+2}$.

4.21. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5-x^2+x}{x^4+2x+5}$.

4.22. $\lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{6n^3-2n+7}{3n^3-5n+2}$.

4.23. $\lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{7n^4-2n^3+2}{n^4+2n}$.

4.24. $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{3a^7+6a-5}{4a^7+2a^3-3}$.

4.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x+5}$.

4.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-5n+2}{2n^4+3n^2-n}$.

4.27. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^4-4x^3+8}{2x^3-3x^2+1}$.

4.28. $\lim\limits_{a\to-\infty}\dfrac{3a^4-4a^2+5}{6a^4+2a^3-1}$.

4.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+3n^2-n^5}{2n+n^2-3n^5}$.

4.30. $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{2z^3+7z-4}{6z^3-3z^2+2}$.

5

5.1. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\sin 3\alpha\cdot\operatorname{ctg} 2\alpha$.

5.2. $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{1-\cos 4\varphi}{\sin^2 3\varphi}$.

5.3. $\lim\limits_{\beta\to 0}\dfrac{\arcsin 6\beta}{2\beta}$.

5.4. $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\varphi\sin 2\varphi}{\operatorname{tg}^2 3\varphi}$.

5.5. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 5\alpha}{3\alpha}$.

5.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{1-\cos 4x}}{\sin^2 3x}$.

5.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 6x}{x\operatorname{tg} 2x}$.

5.8. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin 5y}{\arcsin 2y}$.

5.9. $\lim\limits_{\beta\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3\beta}{1-\cos 4\beta}$.

5.10. $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\arcsin^2\varphi}{3\varphi\sin\varphi}$.

5.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 4x}{\sin^2 3x}$.

5.12. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\alpha\sin 3\alpha}$.

5.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\operatorname{tg}^2 5x}$.

5.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{4x}$.

5.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{4x^2}$.

5.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{3x^2}$.

5.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\operatorname{tg} 2x}$.

5.18. $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cdot\operatorname{ctg} 3x$.

5.19. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{5z^2}{\sin 3z\cdot\operatorname{tg} 2z}$.

5.20. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\sin 8\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

5.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{arctg} 3x}$.

5.22. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}^2 3x\cdot\operatorname{ctg}^2 2x$.

5.23. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1-\cos 8\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.

5.24. $\lim\limits_{x\to 0} 3x\ \ \operatorname{ctg} 7x$.

5.25. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha\sin 3\alpha}{\cos\alpha-\cos^3\alpha}$.

5.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 4x}$.

5.27. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3\alpha}{2\alpha\sin 5\alpha}$.

5.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg} 2x}{1-\cos 3x}$.

5.29. $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 3x\cdot\operatorname{ctg}^2 5x$.

5.30. $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\sin^2 3\varphi}{\operatorname{arctg}^2 2\varphi}$.

6

6.1. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x-1}\right)^{4x}$.

6.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x+4}\right)^{2x-5}$.

6.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{3x-4}$.

6.4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+5}\right)^{4-x}$.

6.5. $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{3y-1}\right)^{y+2}$.

6.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-2}$.

6.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{5-2x}$.

6.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{2x-4}$.

6.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x-1}\right)^{1-4x}$

6.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x-4}\right)^{1-6x}$.

6.11. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^{3x+1}$.

6.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{2x+3}$.

6.13. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-5}\right)^{x-1}$.

6.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{2-4x}{1-4x}\right)^{x+3}$.

6.15. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-2}\right)^{3x}$.

6.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{2x-3}{2x-1}\right)^{x}$.

6.17. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{x^2/(x-2)}$.

6.18. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x-1}\right)^{x+3}$.

6.19. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{5x/(x-1)}$.

6.20. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{(x+1)/(x-3)}$.

6.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}$.

6.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+4}\right)^{x-1}$.

6.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}$.

6.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x-4}\right)^{x-3}$.

6.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x-1}\right)^{x-4}$.

6.26. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{x/(x^2-1)}$.

6.27. $\lim\limits_{t\to\infty} \ln\left(\dfrac{4+3t}{1+3t}\right)^{t-2}$.

6.28. $\lim\limits_{x\to 2} (5-2x)^{x^2/(x-2)}$.

6.29. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{x+3}{x-4}\right)^{x}$.

6.30. $\lim\limits_{x\to 1} (7-6x)^{x(3x-3)}$.

3. Контрольная работа «Производные и их приложения» (2 часа)

1. Найти производную первого порядка y'.

1.1. $y=\left(\dfrac{2}{27x}-\dfrac{1}{9x^2}\right)\sqrt{3x+x^2}$.

1.2. $y=x\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

1.3. $y=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$.

1.4. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{3x-5}}$.

1.5. $y=\dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$.

1.6. $y=\dfrac{\sqrt{1+\cos^3 x}}{1+\sin 3x}$.

1.7. $y=\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)^3$.

1.8. $y=\dfrac{x}{(x+1)^2(x^2+1)^3}$.

1.9. $y=\sqrt[5]{x+x\sqrt[3]{x}}$.

1.10. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+\sin 3x}{3+2\sin 3x}}$.

1.11. $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$.

1.12. $y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}-2\sqrt{6x+5}$.

1.13. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

1.14. $y=x\sqrt[3]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$.

1.15. $y=\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}$.

1.16. $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$.

1.17. $y=\sqrt{\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x^3-\sqrt{x}}}$.

1.18. $y=5\sqrt{x^2+\sqrt{x}+1/x}$.

1.19. $y=1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x-1}}$.

1.20. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{3x-2}}$.

1.21. $y=\sqrt[4]{x^2+3x}-\sqrt[5]{(6x-1)^2}$.

1.22. $y=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}}-4\sqrt{1+x}$.

1.23. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

1.24. $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

1.25. $y=\sqrt[5]{3x^2+1}+\sqrt[3]{x^3-4}$.

1.26. $y=x\sqrt{1+x^2}$.

1.27. $y=5\sqrt[5]{4x+3}-\dfrac{2}{\sqrt{x^3+x+1}}$.

1.28. $y=3\sqrt[3]{x^5+5x^4-5/x}$.

1.29. $y=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$.

1.30. $y=x+\sqrt[5]{\dfrac{1+x^5}{1-x^5}}$.

2. Найти производную первого порядка y'.

2.1. $y=3^{\operatorname{arctg}^2(4x+1)}$.

2.2. $s=\ln\frac{5+\sqrt{25-t^2}}{t}$.

2.3. $z=y^{\arcsin((2y+1)/3)}$.

2.4. $y=(1+\operatorname{ctg}^2 3x)e^{-x}$.

2.5. $y=e^{-\varphi^2}\cos^3(2\varphi+3)$.

2.6. $y=e^{-\sqrt{x}}/(1+e^{2x})$.

2.7. $y=e^{-1/\cos x}$.

2.8. $y=\sqrt[3]{(1+\sin^3 2x)^2}$.

2.9. $y=3^{x\cos^3 x}$.

2.10. $y=e^{x/\sqrt{3}}\operatorname{arctg}^2 x$.

2.11. $y=\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$.

2.12. $y=\cos 2x\cdot\sin^2 x$.

2.13. $y=\sin^3 5x\cdot\sin^5 3x$.

2.14. $Q=e^{\cos^2 3\varphi}$.

2.15. $y=e^{\operatorname{tg} x}\cos x$.

2.16. $y=\arcsin(\operatorname{tg} x)$.

2.17. $y=e^{\cos x}\sin^2 x$.

2.18. $y=\ln\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

2.19. $z=(\sin y)/(1+\operatorname{tg} y)$.

2.20. $s=e^t/\cos t$.

2.21. $y=(1+e^x)/(1-e^x)$.

2.22. $y=\sin^2 3x$.

2.23. $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$.

2.24. $y=\frac{4\ln x}{1-\ln x}$.

2.25. $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{ctg} x+x$.

2.26. $y=\ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}}-x$.

2.27. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\cos x}}$.

2.28. $y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$.

2.29. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}$.

2.30. $y=\operatorname{tg}^2(x^3+1)$.

3. Вычислить первую производную функции при указанном значении аргумента или параметра либо при заданных координатах точки.

3.1. $f(x)=(1-2x)/\left(1+\sqrt[3]{2x}\right)$, $x=4$.

3.2. $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x}}$, $x=1$.

3.3. $f(x)=xe^{x/a}$, $x=0$.

3.4. $f(t)=\ln(1+a^{-2t})$, $t=0$.

3.5. $f(t)=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos t}$, $t=\pi/2$.

3.6. $f(x)=x/(2x-1)$, $x=-2$.

3.7. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $x=-8$.

3.8. $f(x)=(\sqrt{x}-1)^2/x$, $x=0{,}01$.

3.9. $f(x)=x^2-1/(2x^2)$, $x=\pm 2$.

3.10. $f(x)=x^3/3-x^2+x$, $x=-1$.

3.11. $f(x)=e^{-x}\cos 3x$, $x=0$.

3.12. $f(x)=\ln(1+x)+\arcsin(x/2)$, $x=1$.

3.13. $f(x)=\operatorname{tg}^3(\pi x/6)$, $x=2$.

3.14. $2y=1+xy^3$, $x=1$, $y=1$.

3.15. $y=(x+y)^3-27(x-y)$, $x=2$, $y=1$.

3.16. $ye^y=e^{x+1}$, $x=0$, $y=1$.

3.17. $y^2 = x + \ln(y/x)$, $x = 1$, $y = 1$.
3.18. $x = t \ln t$, $y = (\ln t)/t$, $t = 1$.
3.19. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t = \pi/2$.
3.20. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $t = \pi/4$.
3.21. $y(x) = (1 + x^3)(5 - 1/x^2)$, $x = 1$, $x = 0$.
3.22. $s(t) = 3/(5 - t) + t^2/5$, $t = 0$, $t = 2$.
3.23. $\varphi(z) = z\left(1 + \sqrt{z^3}\right)$, $z = 0$.
3.24. $\rho(\varphi) = \varphi/(1 - \varphi^2)$, $\varphi = 2$.
3.25. $\varphi(z) = (a - z)/(1 + z)$, $z = 1$.
3.26. $s(t) = 3/(5 - t) + t^2/5$, $t = 0$, $t = 2$.
3.27. $y = e^{\sqrt{\ln x}}$, $x = e$.
3.28. $y = \sqrt[3]{\operatorname{tg}(x/2)}$, $x = \pi/2$.
3.29. $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$, $x = 0$, $x = 1$.
3.30. $F(x) = 1/(x + 2) + 3/(x^2 + 1)$, $x = 0$, $x = 1$.

4. Найти вторую производную y''.

4.1. $y = \dfrac{x-1}{x+1} e^{-x}$.
4.2. $y = \operatorname{arctg}(x^2)$.
4.3. $y = x^2 \ln x$.
4.4. $y = \sqrt{a^2 - x^2}/x$.
4.5. $y = \ln \operatorname{ctg} 4x$.
4.6. $y = \sqrt[3]{(1 - x)^2}$.
4.7. $y = 2^{\operatorname{ctg} 3x}$.
4.8. $y = xe^{1/x}$.
4.9. $y = xe^{-x}$.
4.10. $y = \ln \ln x$.
4.11. $y = x\sqrt{1 + x^2}$.
4.12. $y = x/\sqrt{1 - x^2}$.
4.13. $y = (\ln x)/x$.
4.14. $y = x^2 \ln x^3$.
4.15. $y = x^3 e^{5x}$.
4.16. $y = (1 + x^2)\operatorname{tg} x$.
4.17. $y = e^x \cos^4 x$.
4.18. $y = e^{-x} \cos x$.
4.19. $y = \sqrt{x} e^x$.
4.20. $y = xe^{-x^3}$.
4.21. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1 - x^2}$.
4.22. $y = x^3 \ln x$.
4.23. $y = xe^{\sin x}$.
4.24. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$.
4.25. $y = x \operatorname{arctg} x$.
4.26. $y = x/(x^2 - 1)$.
4.27. $y = x - \operatorname{arctg} x$.
4.28. $y = \sin x - \dfrac{1}{3}\cos^3 x$.
4.29. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.
4.30. $y = \ln\left(x + \sqrt{x}\right)$.

5. Найти вторую производную d^2y/dx^2 функции.

5.1. $\begin{cases} x = t + \ln \cos t, \\ y = t - \ln \sin t. \end{cases}$
5.2. $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$
5.3. $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2}\sin t, \\ y = \cos^3 t. \end{cases}$
5.4. $\begin{cases} x = t^5 + 2t, \\ y = t^3 - 8t - 1. \end{cases}$
5.5. $\begin{cases} x = t^3/3 + t^2/2 + t, \\ y = t^2/2 + 1/t. \end{cases}$
5.6. $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1), \\ y = \arccos 2t. \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} x = t^2 + t + 1, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = 1/\cos^2 t. \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} x = (2 - t)/(2 + t^2), \\ y = t^2/(2 + t^2). \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} x = 2\cos^3 2t, \\ y = \sin^3 2t. \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin^2 t. \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t. \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} x = 2t^2 + t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} x = 3t - t^3. \\ y = 3t^2. \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 2t^2. \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = 1/\cos^2 t. \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = (t + 1/t)/2. \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3/3 - t. \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} x = \sin(t/2), \\ y = \cos t. \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} x = \cos at, \\ y = \sin at. \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = \cos t. \end{cases}$

5.26. $\begin{cases} x = \cos(t/2), \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

5.27. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \\ y = 2\ln \operatorname{ctg} t. \end{cases}$

5.28. $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = e^{t^2}. \end{cases}$

5.29. $\begin{cases} x = 3\cos^2 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

5.30. $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = at\sin t. \end{cases}$

6. Решить следующие задачи.

6.1. Под каким углом синусоида $y = \sin x$ пересекает прямую $y = 1/2$?

6.2. Показать, что гиперболы $xy = 8$ и $x^2 - y^2 = 12$ пересекаются под прямым углом.

6.3. Определить угол, под которым пересекаются кривые $x^2 + y^2 = 8$ и $y^2 = 2x$.

6.4. Под каким углом пересекаются гипербола $y = 1/x$ и парабола $y = \sqrt{x}$?

6.5. На параболе $y = x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней параллельна секущей?

6.6. Канат висячего моста имеет форму параболы и прикреплен к вертикальным опорам, отстоящим одна от другой на расстоянии 200 м. Самая нижняя точка каната находится на 40 м ниже точек подвеса. Найти угол между канатом и опорами.

6.7. При каком значении a кривая $y = (ax + x^3)/4$ пересекает ось Ox под углом 45°?

6.8. Найти угол пересечения кривой $y = x - x^3$ и прямой $y = 5x$.

6.9. Найти угол пересечения линий $y = 1 + \sin x$ и $y = 1$.

6.10. Найти угол пересечения линий $y = \sqrt{2}\sin x$ и $y = \sqrt{2}\cos x$.

6.11. Найти угол пересечения кривых $y = x^3$ и $y = 1/x^2$.

6.12. Составить уравнения касательной и нормали к полукубической параболе $x = t^2$, $y = t^3$, проведенных в точке $t = 2$.

6.13. Найти угол пересечения кривых $x^2 + y^2 = 5$ и $y^2 = 4x$.

6.14. Определить, под каким углом кривая $y = (x - 1)/(1 + x^2)$ пересекает ось абсцисс.

6.15. Найти точки, в которых касательные к графикам функций $f(x) = x^3 - x - 1$ и $\varphi(x) = 3x^2 - 4x + 1$ параллельны.

6.16. Записать уравнения касательных и нормалей к кривой $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ в точках пересечения ее с осью Oy.

6.17. Записать уравнения касательных и нормалей к кривой $y = 4x - x^3$ в точках пересечения ее с осью Ox.

6.18. Записать уравнение касательных к гиперболе $xy = 4$ в точках с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = -4$ и найти угол между касательными.

6.19. На параболе $y = x^2 + 5x + 3$ взяты две точки с абсциссами $x = -2$ и $x = 3$. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна секущей, проведенной через эти точки?

6.20. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 3y^2 + 9x + 14 = 0$ в точке $(-2, 3)$.

6.21. Записать уравнение нормали к астроиде $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ в точке, для которой $t = \pi/4$.

6.22. Составить уравнение той нормали к кривой $y = \ln(2x + 1)$, которая перпендикулярна к биссектрисе первого и третьего координатных углов.

6.23. Найти расстояние от вершины параболы $y = x^2 - 4x + 5$ до касательной к ней в точке пересечения параболы с осью Oy.

6.24. В уравнении параболы $y = x^2 + bx + c$ определить b и c, если известно, что парабола касается прямой $y = x$ в точке $x = 2$.

6.25. Провести касательную к кривой $y = (x + 9)/(x + 5)$ так, чтобы она прошла через начало координат. Записать уравнение этой касательной.

6.26. Найти угол, под которым пересекаются параболы $y = (x - 2)^2$ и $y = -4 + 6x - x^2$.

6.27. Найти углы, под которыми пересекаются эллипс $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ и парабола $4y = 4 - 5x^2$.

6.28. Составить уравнение касательной к линии $y = \operatorname{arctg}(x/2)$ в точках ее пересечения с прямой $x - 2 = 0$.

6.29. Найти касательную к кривой $4x^2 + y^2 = 80$, параллельную прямой $x + y - 6 = 0$.

6.30. При каком значении параметра a парабола $y = ax^3$ касается кривой $y = \ln x$?

7. Решить следующие задачи.

7.1. Закон движения материальной точки по прямой задан формулой $s = t^3 - 3t^2 + 3t + 5$. В какие моменты времени t скорость точки равна нулю?

7.2. Две точки движутся по прямой по законам $s_1 = t^3 - 3t$ и $s_2 = t^3 - 5t^2 + 17t - 4$. В какой момент времени их скорости будут равны?

7.3. Тело, брошенное вверх, движется по закону $s = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{17}{2}t^2 + 60t - 49$. В какой момент времени скорость тела станет равной нулю? Найти наибольшую высоту подъема тела.

7.4. Скорость тела, движущегося прямолинейно, определяется формулой $v = 3t + t^2$. Какое ускорение будет иметь тело через 4 с после начала движения?

7.5. Тело массой 100 кг движется прямолинейно по закону $s = 2t^2 + 3t + 1$. Определить кинетическую энергию $mv^2/2$ тела через 5 с после начала движения.

7.6. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью a м/с. За какое время и на каком расстоянии от поверхности Земли тело достигнет наивысшей точки?

7.7. Плот подтягивается к берегу с помощью каната, который наматывается на ворот со скоростью 50 м/мин. Определить скорость движения плота в тот момент, когда его расстояние от берега будет равно 25 м, если ворот расположен на берегу на $6\sqrt{6}$ м выше поверхности воды.

7.8. Заряд, проходящий через проводник, начиная с момента времени $t = 0$, определяется формулой $Q = t^3 - 9t^2 + 15t + 1$. В какие моменты времени сила тока в проводнике будет равна нулю?

7.9. Тело массой 6 т движется прямолинейно по закону $s = -1 + \ln(t+1) + (t+1)^3$. Требуется вычислить кинетическую энергию $mv^2/2$ тела через 1 с после начала движения.

7.10. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $s = \frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{8}t$. Определить скорость движения точки через 2 с после начала движения.

7.11. Зависимость между количеством x вещества, получаемого в результате некоторой реакции, и временем t выражается уравнением $x = 7(1 - e^{-3t})$. Определить скорость реакции через 2 с после начала опыта ($t = 0$).

7.12. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален кубу времени. Первые два оборота были сделаны колесом за 4 с. Найти угловую скорость ω колеса через 16 с после начала движения.

7.13. Тело движется по прямой Ox согласно закону $x = t^3/3 - 2t^2 + 3t$. Определить скорость и ускорение движения. В какие моменты тело меняет направление движения?

7.14. По параболе $y = x(8 - x)$ движется точка так, что ее абсцисса изменяется в зависимости от времени t по закону $x = t\sqrt{t}$. Какова скорость изменения ординаты в точке $M(1, 7)$?

7.15. Точка движется по гиперболе $y = 10/x$ так, что ее абсцисса равномерно возрастает со скоростью 1 м/с. С какой скоростью изменяется ее ордината, когда точка проходит положение (5, 2)?

7.16. Закон движения точки по оси Ox $s = 5t - t^2$. Найти скорость и ускорение точки для моментов времени $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ с.

7.17. Точка движется по параболе $y = \sqrt{6x}$ так, что ее абсцисса возрастает со скоростью 10 см/с. Какова скорость изменения ординаты в этой точке в момент, когда $x = 6$?

7.18. Закон движения точки по прямой задан формулой $s = 5t - 4/t^2 + 3$. Найти скорость и ускорение точки через 1 с после начала движения.

7.19. Точка движется по кривой $y = \sqrt[3]{x}$ в первом квадранте. Найти координаты точки в момент времени, когда скорость изменения абсциссы этой точки в 12 раз больше скорости изменения ее ординаты.

7.20. Точка движется по закону $s = 4t^3 + 2t^2 - 5$ (см). Найти скорость и ускорение движения точки через 2 с.

7.21. Радиус шара возрастает равномерно со скоростью 5 см/с. С какой скоростью увеличиваются площадь поверхности шара и его объем в момент, когда его радиус становится равным 50 см?

7.22. Электрический заряд, проходящий через проводник, начиная с момента времени $t=0$, задается формулой $Q=2t^2+10t+9$. Найти силу тока для $t=15$ с.

7.23. В какой точке эллипса $16x^2+9y^2=400$ ордината убывает с той же скоростью, с какой возрастает абсцисса?

7.24. Сторона квадрата растет со скоростью 5 м/с. Какова скорость изменения периметра и площади квадрата в тот момент, когда сторона его равна 50 м?

7.25. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за 8 с. Найти угловую скорость ω колеса через 32 с после начала движения.

7.26. Расстояние s м, пройденное телом за t с, определяется формулой $65s=t^3/8+3t^2+t$. Найти скорость и ускорение тела при $t=10$.

7.27. Вращающееся маховое колесо, задерживаемое тормозом, за t с поворачивается на угол $\varphi=a+bt-ct^2$, где a, b, c — положительные постоянные. Определить угловую скорость и ускорение вращения колеса. Когда колесо остановится?

7.28. Точка движется прямолинейно так, что $v^2=2bx$, где v — скорость точки; x — пройденный путь; b — некоторая постоянная. Определить ускорение движения точки.

7.29. В период разгона маховик вращается по закону $\varphi=t^3/10$. Через какое время после начала движения угловая скорость маховика будет равна 60π рад/с? Чему будет равно угловое ускорение тела в этот момент?

7.30. Точка движется прямолинейно по закону $s=60t-5t^3$. Через какой промежуток времени после начала движения точка остановится? Найти путь, пройденный точкой за это время.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Учебники и учебные пособия

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии н линейной алгебры.— М.: Наука, 1980.— 336 с.
2. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальное н интегральное исчисление.— М.: Наука, 1980.— 432 с.
3. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.— М.: Наука, 1980.— 176 с.
4. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра.— М.: Наука, 1980.— 400 с.
5. *Головина Л. И.* Линейная алгебра н иекоторые ее приложения.— М.: Наука, 1975.— 408 с.
6. *Гурский Е. И.* Основы линейной алгебры и аналитической геометрии.— Мн.: Выш. шк., 1982.— 272 с.
7. *Долгов Н. М.* Высшая математика.— Киев: Вища шк., 1988.— 416 с.
8. *Жевняк Р. М., Карпук А. А.* Высшая математика: В 5 ч.— Мн.: Выш. шк., 1984—1988.— Ч. 1.— 1984.— 223 с.
9. *Ильин В. А., Позняк В. Г.* Линейная алгебра.— М.: Наука, 1974.— 296 с.
10. *Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики.— М.: Наука, 1986.— 575 с.
11. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа: В 2 т.— М.: Высш. шк., 1981.— Т. 1.— 688 с.
12. *Лихолетов И. И.* Высшая математика, теории вероятностей и математическая статистика.— Мн.: Выш. шк., 1976,— 720 с.
13. *Пискунов И. С.* Дифференциальное и интегральиое исчисление: В 2 т.— М.: Наука, 1985.— Т. 1.— 432 с.
14. *Рублев А. Н.* Курс линейной алгебры и аналитической геометрии.— М.: Высш. шк., 1972.— 424 с.

Сборники задач и упражиеиий

15. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа.— М.: Наука, 1985.— 416 с.
16. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: В 3 ч.— М.: Высш. шк., 1986, Ч. 1.— 446 с.
17. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов/Г. С. Бараненков, Б. П. Демидович, В. А. Ефименко и др.; Под ред. Б. П. Демидовича.— М.: Наука, 1978.— 380 с.
18. *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аиалнтической геометрии.— М.: Наука, 1983.— 244 с.
19. *Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты.— М.: Высш. шк., 1983.— 176 с.

20. *Лихолетов И. И., Мацкевич И. П.* Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике.— Ми.: Выш. шк., 1976.— 456 с.

21. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике.— М.: Наука, 1964.— 360 с.

22. Сборник задач по курсу высшей математики / Г. И. Кручкович, Н. И. Гутарииа, П. Е. Дюбюк и др.; Под ред. Г. И. Кручковича.— М.: Высш. шк., 1973.— 576 с.

23. Сбориик задач по математике для втузов: Линейиая алгебра и основы математического анализа: В 2 ч./В. А. Болгов, Б. П. Демидович, В. А. Ефименко и др.; Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича.— М.: Наука, 1981.— Ч. 1.— 368 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Рябушко Антон Петрович, **Бархатов** Виктор Владимирович, **Державец** Вера Владимировна, **Юруть** Иван Ефимович

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В трех частях

Часть 1

Заведующий редакцией *Л. Д. Духвалов*
Редактор *М. С. Молчанова*
Младший редактор *И. В. Моховикова*
Художник переплета
и художественный редактор *Ю. С. Сергачев*
Технический редактор *М. Н. Кислякова*
Корректоры *Т. К. Хваль, В. В. Неверко*

ИБ № 2891

Сдано в набор 04.10.89. Подписано в печать 21.09.90. Формат $84 \times 108/32$. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл.-печ. л. 14,28. Усл. кр.-отт. 14,28. Уч.-изд. л. 15,29. Тираж 25 000 экз. Заказ 2959. Цена 95 к.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета БССР по печати. 220048, Минск, проспект Машерова, 11

Минский ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат МППО им. Я. Коласа. 220005, Минск, ул. Красная, 23.