Министерство образования, науки и инновационной политики
Новосибирской области
ГАПОУ НСО «Новосибирский машиностроительный колледж»

Методические рекомендации по выполнению контрольной работы
по учебной дисциплине

«МАТЕМАТИКА»

для студентов заочной формы обучения
по специальности
15.02.08 Технология машиностроения

Новосибирск, 2017

Методические рекомендации подготовлены на основании требований Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования к содержанию и уровню подготовки выпускников по данной дисциплине. Основная задача учебно-методического комплекса – способствовать формированию у студентов знаний в области математики, навыков практического использования этих знаний в интересах профессиональной деятельности.

Методическое пособие предназначено для студентов – заочников, обучающихся по специальности 15.02.08 Технология машиностроения.

В пособии по каждой теме дисциплины содержится краткий теоретический материал, образцы решения и оформления примеров, литература, необходимая при изучении материала, а также вопросы для самопроверки.

Приведены задания обязательной контрольной работы по дисциплине «Математика».

Разработано ГАПОУ НСО «Новосибирский машиностроительный колледж». Преподавателем высшей категории Москаленко Т.А.

Рассмотрено и одобрено заседанием ПЦК общеобразовательного цикла. Протокол №1 от 13.09.2017г. Председатель ПЦК Савушкина Е.В.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математика - это наука, изучающая пространственные формы и количественные отношения действительного мира.

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. В то же время математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки современного специалиста.

Основной задачей курса математики в образовательных заведениях среднего профессионального образования является математическое обеспечение специальной подготовки, т.е. вооружение студентов, будущих специалистов, математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения специальных дисциплин, разработки курсовых, расчётно-графических работ и дипломных проектов, для профессиональной деятельности и продолжения образования.

Учебная дисциплина «Математика» является естественнонаучной, формирующей базовые знания для освоения общепрофессиональных и специальных дисциплин.

При изучении математики широко используются современные методы и средства обучения, обеспечивается реализация внутри предметных и межпредметных связей.

Целью преподавания дисциплины является изучение студентами математического аппарата и приобретение ими навыков, необходимых для усвоения общенаучных и специальных дисциплин, преподаваемых в колледже.

В результате изучения дисциплины «Математика» студент будет

иметь представление:

▪ о роли и месте математики в современном мире, общности ее понятий и представлений;

знать:

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении профессиональной образовательной программы;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
- основные понятия и методы математического анализа, дискретной математики, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления.

уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Основными видами занятий по данной дисциплине являются лекции, практические занятия и самостоятельная работа студентов.

Дисциплина изучается в течение I курса. Каждая лекция сопровождается практическими занятиями, на которых осуществляется решение задач.

Данная дисциплина является основой для всех дисциплин, в которых применяется математический аппарат.

Содержание учебной дисциплины

Раздел I Линейная алгебра

Матрицы и определители

Матрицы: сложение, умножение на число, произведение матриц, обратная матрица. Определители 2-го порядка. Определители n-го порядка.

Системы линейных уравнений и методы их решения

Системы двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Метод Крамера. Системы m линейных уравнений с n неизвестными. Метод Гаусса. Исследование совместности систем.

Раздел II. Введение в математический анализ

Предел и непрерывность функций

Символ ∞. Неопределенности. Числовые последовательности. Предел монотонной ограниченной последовательности. Число e. предел функции в точке. Простейшие свойства функций, имеющих предел. Предельный переход в пространствах.

Функции, непрерывные в области. Элементарные функции, их непрерывность. Односторонние пределы. Точки разрыва функции. Свойства функций, непрерывных на замкнутом множестве.

Предел функции в точке и на бесконечности. Основные теоремы о пределах: предел суммы и разности двух функций, предел произведения двух функций, предел отношения двух функций. Техника вычисления пределов.

Дифференциальное исчисление

Производная 1-го порядка. Касательная и нормаль к графику функции. Производные суммы, произведения, частного; сложной, неявной и параметрической функций. Производные и дифференциалы высших порядков. Локальное поведение функции: возрастание, убывание, максимум, минимум. Теорема Ферма (необходимое условие экстремума). Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Раскрытие неопределенностей с помощью правила Лопиталя.

Возрастание и убывание функций на отрезке. Необходимые и достаточные условия локального экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функций. Выпуклость функций вверх и вниз в точке и на отрезке. Необходимые и достаточные условия выпуклости (вогнутости). Точки перегиба графика. Вертикальные и наклонные асимптоты. Построение графика функции на основе исследования с помощью производных 1-го и 2-го порядков.

Интегральное исчисление

Первообразная, ее свойства. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица простейших формул. Простейшие приемы интегрирования. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.

Интегрирование простейших дробей. Разложение дробной рациональной функции на простейшие дроби.

Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Основные свойства определенного интеграла.

Теорема Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.

Приложения определенных интегралов к вычислению площадей плоских фигур, объемов тел, длина отрезка кривой. Некоторые физические приложения ОИ: вычисление работы силы, координат центра масс, давления.

Основы теории комплексных чисел

Комплексные числа: алгебраическая, геометрическая, показательная формы. Формула Эйлера. Действия над КЧ, их геометрическая интерпретация.

Раздел III. Основы дискретной математики, теории вероятностей, математической статистики

Основы дискретной математики

Основные понятия комбинаторики: факториал, перестановки, размещения, сочетания.

Теория вероятностей

Классификация событий. Алгебра событий. Частота случайного события и её свойства. Вероятность события. Классический (комбинаторный) способ вычисления вероятностей. Формулы сложения и умножения вероятностей. Дискретные и непрерывные случайные величины. и их распределение вероятностей. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

Математическая статистика

Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма и статистическая функция распределения, выборочное среднее и дисперсия.

Общие методические рекомендации по изучению дисциплины

Формой обучения студента – заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит их следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, самопроверка, выполнение контрольных работ. В процессе самостоятельной работы студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения письменной или устной консультации. В помощь заочникам организуются чтение лекций, практические занятия. Завершающим этапом изучения отдельных частей курса математики является сдача обязательных контрольных работ в соответствии с учебным планом по специальности.

Изучение материала по учебнику

Изучение материала по учебнику следует выполнять согласно указанным в программе курса темам. Изучая тот или иной вопрос темы по учебнику, целесообразно выполнять на бумаге все вычисления и вычерчивать имеющиеся в учебнике чертежи.

При самостоятельном изучении материала полезно вести конспект. В конспект по мере проработки материала рекомендуется вписывать определения, теоремы, формулы, уравнения и т.п. Поля конспектов могут послужить для выделения тех вопросов, на которые необходимо получить письменную или устную консультации. Ведение конспекта должно быть аккуратным, расположение текста хорошо продуманным. Конспект поможет в подготовке к выполнению контрольной работы.

Решение задач

Чтение учебника должно сопровождаться разбором предлагаемых решений задач. Каждый этап решения задачи должен быть обоснован, исходя из теоретических положений курса. Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. В промежуточные вычисления не следует вводить приближенные значения корней, числа π и других математических констант.

Самопроверка

Опыт прочного усвоения материала темы показывает, что самопроверку проводить необходимо. В настоящем пособии приводятся для самопроверки вопросы, которые акцентируют внимание на наиболее важных, ключевых положениях темы. В процессе выполнения самопроверки необходимо избегать пользования учебником или конспектом. Желание обратиться к учебнику или конспекту показывает недостаточное усвоение материала темы.

Консультации

При изучении теоретического материала или при решении задач у студента могут возникнуть вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается. В такой ситуации студенту следует обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации. При этом необходимо точно указать вопрос, учебник и место в учебнике, где рассмотрен затрудняющий студента вопрос. Если непреодолимые затруднения возникли при решении задачи, то следует указать характер затруднения, привести план решения.

Контрольная работа

В процессе изучения курса студент должен выполнить одну контрольную работу, которая проходит рецензирование. По полученным результатам студент может сделать выводы о степени усвоения им соответствующего раздела курса, внести коррективы в процесс последующей самостоятельной работы по изучению теоретического материала.

К выполнению контрольной работы следует приступать после тщательного разбора имеющихся в учебнике и сборниках задач решений с ответами. В дополнение к предложенным задачам сборников в данном пособии рассмотрены некоторые примеры.

Контрольные работы должны выполняться самостоятельно, так как в противном случае рецензирование работы как диалог общения преподавателя – рецензента и студента с целью оказания последнему методической помощи не достигнет цели.

Лекции, практические занятия

Во время сессий для студентов - заочников читаются лекции, проводятся занятия. На лекциях и практических занятиях проводится обзор наиболее важных разделов курса, могут рассматриваться отдельные вопросы программы, отсутствующие или недостаточно полно освященные в рекомендуемых учебных пособиях.

Рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов является одним из важнейших элементов обучения. Совершенствование организации самостоятельной работы студентов связано с методической помощью и контролем со стороны преподавателя.

Самостоятельная подготовка должна проводиться по следующими направлениям:

- ✓ изучение теоретического материала, изложенного на лекциях или оставленного для самостоятельной проработки;
- ✓ закрепление навыков выполнения заданий после проведения практических занятий;
- ✓ выполнение контрольных работ;
- ✓ подготовка к зачетам и экзаменам.

Пройденный ранее материал также целесообразно повторить перед следующей лекцией или практическим занятием - это существенно облегчит понимание нового материала, который всегда базируется на уже пройденном.

При самостоятельном изучении дисциплины следует прежде всего изучить литературу по соответствующей теме, обращая внимание на наиболее важные моменты, определяющие понимание соответствующего раздела.

Порядок проведения контроля качества подготовки студентов по дисциплине, содержание контролирующих материалов

Контроль успеваемости и качества подготовки студентов включает текущий контроль, рубежный и промежуточную аттестацию.

Текущий контроль качества подготовки студентов осуществляется в ходе всех видов учебных занятий в форме устного опроса, индивидуальных бесед со студентами.

Рубежный контроль имеет целью установить качество усвоения учебного материала по определенным темам учебной дисциплины. Рубежный контроль проводится в виде контрольной работы, которую студент выполняет самостоятельно, в домашних условиях.

Промежуточная аттестация имеет целью определить степень достижения учебных целей по дисциплине. Промежуточная аттестация проводится в форме обязательной аудиторной контрольной работы.

Методические рекомендации по оформлению и выполнению контрольных работ

Контрольная работа представляет собой работу практического характера. Она должна отражать практическое умение студента решать задачи из курса математики. Подготовка контрольной работы предполагает владение навыками практической работы: умение анализировать задание и формулировать подходы к его решению; подбирать литературу и работать с ней, умение добиться практического результата с помощью стандартного набора средств.

Вариант контрольной работы = списочному номеру в группе (уточняйте у куратора группы). При выполнении контрольной работы надо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студентам для переработки.

1. Контрольные работы выполнять в тетради пастой или чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента. В случае печатной работы – обязательно предоставление электронного варианта работы.

2. На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, название дисциплины; здесь же следует указать дату сдачи работы на проверку.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по своему варианту. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также содержащие задачи не своего варианта, не зачитываются.

4. Решение задач надо располагать в порядке, указанном в заданиях, сохраняя номера задач. Задачи выполняются строго по порядку номеров, записывается полное условие каждого номера, аккуратно и подробно оформляется решение (с пояснениями), формулируется четкий ответ.

5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью её условие. Если несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.

6. После получения отрецензированной работы (как зачтённой, так и незачтённой) студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты. В связи с этим следует оставлять в конце тетради чистые листы для работы над ошибками. Вносить исправления в сам текст работы после её рецензирования запрещается.

Теоретические и практические основы дисциплины

Раздел I Линейная алгебра

Тема 1. Матрицы и определители

Определение 1.1. **Матрицей** называется прямоугольная таблица чисел.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначения: A – матрица, a_{ij} - элемент матрицы, $i-$ номер строки, в которой стоит данный элемент, $j-$ номер соответствующего столбца; m – число строк матрицы, n – число ее столбцов.

Определение 1.2. Числа m и n называются **размерностями** матрицы.

Определение 1.3. Матрица называется **квадратной**, если m = n. Число n в этом случае называют **порядком** квадратной матрицы.

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, определяемое единственным образом с использованием всех элементов матрицы. Это число называется определителем.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

*Определение 1.4***. Определителем второго порядка** называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

При этом из произведения элементов, стоящих на так называемой главной диагонали матрицы (идущей из левого верхнего в правый нижний угол) вычитается произведение элементов, находящихся на второй, или побочной, диагонали.

Примеры:

1. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 5 \cdot (-3) = 8 + 15 = 23.$

2. $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -14 & -8 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-8) - (-14) \cdot 4 = -56 + 56 = 0.$

Определение 1.5. **Определителем третьего порядка** называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Замечание. Для того, чтобы легче запомнить эту формулу, можно использовать так называемое правило треугольников. Оно заключается в следующем: элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

образуя два треугольника, симметричных относительно главной диагонали. Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «-», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Примеры

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 4 + 3\cdot(-5)(-1) + 2\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot(-5)\cdot 4 - 1\cdot 1\cdot(-1) = 4 + 15 + 4 - 6 + 40 + 1 = 58.$$

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 6 - 14 = 0.$$

Определение1. 6. **Транспонированием** матрицы называется операция, в результате которой меняются местами строки и столбцы с сохранением порядка их следования. В результате получается матрица $A`$, называемая **транспонированной** по отношению к матрице $A$, элементы которой связаны с элементами $A$ соотношением $a`_{ij} = a_{ji}$.

Основные свойства определителей

Свойство 1. Определитель не изменяется при транспонировании, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Замечание. Следующие свойства определителей будут формулироваться только для строк. При этом из свойства 1 следует, что теми же свойствами будут обладать и столбцы.

Свойство 2. При умножении элементов строки определителя на некоторое число весь определитель умножается на это число, т.е.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Определитель, имеющий нулевую строку, равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 4. Определитель, имеющий две равные строки, равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 5. Определитель, две строки которого пропорциональны, равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 6. При перестановке двух строк определителя он умножается на –1.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 7.

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 8. Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Разложение определителя по строке

Определение1. 7. **Минором** элемента определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания строки и столбца, в которых стоит выбранный элемент.

Обозначение: a_{ij} − выбранный элемент определителя, M_{ij} − его минор.

Пример:

Для $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

$$a_{21} = -5, M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11.$$

Определение1. 8. **Алгебраическим дополнением** A_{ij} элемента определителя называется его минор, если сумма индексов данного элемента i+j есть число четное, или число, противоположное минору, если i+j нечетно, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Рассмотрим еще один способ вычисления определителей третьего порядка – так называемое разложение по строке или столбцу. Для этого рассмотрим следующую теорему:

Теорема 1.1. Определитель равен сумме произведений элементов любой его строки или столбца на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} A_{ij},$$ где i=1,2,3.

Таким образом, для вычисления определителя достаточно найти алгебраические дополнения к элементам какой-либо строки или столбца и вычислить сумму их произведений на соответствующие элементы определителя.

Пример: Вычислим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ с помощью разложения по первому столбцу. Заметим, что A_{31} при этом искать не требуется, так как $a_{31}=0,$ следовательно, и $a_{31}A_{31}=0.$ Найдем A_{11} и A_{21}:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=2, A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-4.$$

Следовательно,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot 2+(-1)\cdot(-4)=6.$$

Определители более высоких порядков

Определение1. 9. **Определитель n-го порядка**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

есть сумма n! членов $(-1)^r a_{1k_1}a_{2k_2}...a_{nk_n}$, каждый из которых соответствует одному из n! упорядоченных множеств $k_1, k_2, ..., k_n$, полученных r попарными перестановками элементов из множества 1,2,…,n.

Замечание 1. Свойства определителей 3-го порядка справедливы и для определителей n-го порядка.

Замечание 2. На практике определители высоких порядков вычисляют с помощью разложения по строке или столбцу. Это позволяет понизить порядок вычисляемых определителей и в конечном счете свести задачу к нахождению определителей 3-го порядка.

Пример: Вычислим определитель 4-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ с помощью разложения по 2-му столбцу. Для этого найдем A_{32} и A_{42}:

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15, A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -15.$$

Следовательно,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 15 + (-1)(-15) = 30.$$

Тема 2. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Правило Крамера

Определение 2.1. **Линейными операциями** над какими-либо объектами называются их сложение и умножение на число.

Определение 2.2. **Линейной комбинацией** переменных называется результат применения к ним линейных операций, т.е. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$, где $\alpha_i -$ числа, $x_i -$ переменные.

Определение 2.3. **Линейным уравнением** называется уравнение вида

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b, \tag{2.1}$$

где a_i и b – числа, x_i - неизвестные.

Таким образом, в левой части линейного уравнения стоит линейная комбинация неизвестных, а в правой – число.

Определение 2.4. Линейное уравнение называется **однородным**, если b = 0. В противном случае уравнение называется **неоднородным.**

Определение 2.5. **Системой линейных уравнений (линейной системой**) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.2}$$

где a_{ij}, b_i - числа, x_j - неизвестные, n – число неизвестных, m – число уравнений.

Определение 2.6. **Решением** линейной системы (2.2) называется набор чисел

$x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}$, которые при подстановке вместо неизвестных обращают каждое уравнение системы в верное равенство.

Метод Гаусса решения линейных систем

Замечание. Линейная система (2.2) может иметь единственное решение, бесконечно много решений или не иметь ни одного решения.

Примеры:

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$.

Единственным решением является пара чисел x = 1, y = 2.

2. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$.

Решением этой системы будут любые два числа x и y, удовлетворяющие условию y = 3 – x. Например, x=1, y=2; x=0, y=3 и т. д.

3. $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

Очевидно, что эта система не имеет решений, так как разность двух чисел не может принимать двух различных значений.

Рассмотрим способы нахождения единственного решения системы, в которой число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.3)$$

Пусть $a_{11} \neq 0$ (этого всегда можно добиться, поменяв уравнения местами). Разделим обе части первого уравнения на a_{11} и вычтем полученное уравнение из каждого из остальных уравнений системы, умножив его предварительно на a_{i1}, где i – номер очередного уравнения. Как известно, полученная при этом новая система будет равносильна исходной. Коэффициенты при x_1 во всех уравнениях этой системы, начиная со второго, будут равны 0, т.е. система выглядит так:

$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + ... + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\ \quad \tilde{a}_{22}x_2 + ... + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \quad .... \\ \quad \tilde{a}_{n2}x_2 + ... + \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n \end{cases} .$$

Если новые коэффициенты при x_2 не все равны нулю, можно таким же образом исключить x_2 из третьего и последующих уравнений. Продолжая эту операцию для следующих неизвестных, приведем систему к так называемому треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + ... + \hat{a}_{1n}x_n = \hat{b}_1 \\ \quad x_2 + ... + \hat{a}_{2n}x_n = \hat{b}_2 \\ \quad .... \\ \quad\quad x_n = \hat{b}_n \end{cases} . \qquad (2.4)$$

Здесь символами $\tilde{a}_{ij}, \hat{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ и $\hat{b}_i$ обозначены изменившиеся в результате преобразований числовые коэффициенты и свободные члены.

Из последнего уравнения системы (2.4) единственным образом определяется x_n, а затем последовательной подстановкой – остальные неизвестные.

Замечание. Иногда в результате преобразований в каком-либо из уравнений обращаются в 0 все коэффициенты и правая часть, то есть оно превращается в тождество 0=0. Исключив его из системы, мы уменьшим число уравнений по сравнению с числом неизвестных. Такая система не может иметь единственного решения.

Если же в процессе применения метода Гаусса какое-нибудь уравнение превратится в равенство вида 0=1 (коэффициенты при неизвестных обратились в 0, а правая часть приняла ненулевое значение), то исходная система не имеет решения, так как подобное равенство является неверным при любых значениях неизвестных.

Примеры:

1. Решим методом Гаусса систему $\begin{cases} x+3y-z=4 \\ 2x-y-5z=-15. \\ 5x+y+4z=19 \end{cases}$

Вычтем из второго уравнения удвоенное первое, а из третьего – первое, умноженное на 5.

Получим: $\begin{cases} x+3y-z=4 \\ -7y-3z=-23 \\ -14y+9z=-1 \end{cases}$.

Теперь вычтем из третьего уравнения удвоенное второе, а затем разделим второе уравнение на –7 (коэффициент при y), а третье – на 15 (новый коэффициент при z). Система примет вид:

$$\begin{cases} x+3y-z=4 \\ y+\dfrac{3}{7}z=\dfrac{23}{7} \\ z=3 \end{cases}.$$

Отсюда z=3, y=2, x=1 – единственное решение системы.

2. Система $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+y+z=3 \\ 3x+2y+2z=8 \end{cases}$ после исключения x из второго и третьего уравнений примет вид: $\begin{cases} x+y+z=5 \\ -y-z=-7 \\ -y-z=-7 \end{cases}$.

Если затем вычесть второе уравнение из третьего, то последнее уравнение станет тождеством 0=0.

В системе осталось два уравнения: $\begin{cases} x+y+z=5 \\ y+z=7 \end{cases}$.

Ее решение можно записать в виде: x = -2, y – любое число, z = 7 – y.

Таким образом, система имеет бесконечно много решений.

3. $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+y+z=3 \\ 3x+2y+2z=10 \end{cases}$.

Применив к этой системе метод Гаусса, получим $\begin{cases} x+y+z=5 \\ -y-z=-7 \\ -y-z=-5 \end{cases}$,

откуда $\begin{cases} x+y+z=5 \\ -y-z=-7 \\ 0=2 \end{cases}$.

Последнее равенство является неверным при любых значениях неизвестных, следовательно, система не имеет решения.

Правило Крамера

Рассмотрим систему (2.3). Назовем **главным определителем** этой системы определитель Δ, элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Предположим сначала, что $\Delta \neq 0$. Умножим каждое уравнение системы (2.3) на алгебраические дополнения $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{nj}$ элементов j-го столбца Δ.

Сложив затем все уравнения, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj}\right) = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}. \qquad (2.5)$$

Отметим, что

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1i} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2i} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{ni} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(j-й столбец)

(Результат получен из разложения определителя по j-му столбцу). Такой определитель равен 0 при $i \neq j$ и равен Δ при $i = j$. Правая часть равенства (2.5) представляет собой определитель Δ, в котором вместо j-го столбца стоит столбец свободных членов системы (2.3). Назовем такой определитель Δ_{x_j}. Рассматривая $j = 1, 2, \dots, n$, получим систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_{x_1} \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_{x_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta \cdot x_n = \Delta_{x_n} \end{cases} \quad (2.6).$$

Разделив все уравнения на Δ, найдем единственное решение: $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$.

Предположим теперь, что Δ=0. Тогда система (2.6) примет вид:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 = \Delta_{x_1} \\ 0 \cdot x_2 = \Delta_{x_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \cdot x_n = \Delta_{x_n} \end{cases}.$$

В этом случае, если все Δ_{x_j}=0, система выглядит так: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 = 0 \\ 0 \cdot x_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \cdot x_n = 0 \end{cases}$ и имеет бесконечно много решений. Если же хотя бы один из $\Delta_{x_j} \neq 0,$ система решений не имеет.

Таким образом, правило Крамера позволяет найти единственное решение системы (2.3) или сделать вывод о существовании бесконечного числа решений либо об их отсутствии:

1) Если $\Delta \neq 0,$ система (2.3) имеет единственное решение, определяемое по формулам: $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, x_n = \dfrac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$ **.**

2) Если $\Delta = \Delta_{x_j}$=0, система имеет бесконечно много решений.

3) Если Δ=0, а хотя бы один из $\Delta_{x_j} \neq 0,$ система не имеет решений.

Примеры:

1. Рассмотрим систему $\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ 2x - y - 5z = -15. \\ 5x + y + 4z = 19 \end{cases}$, решенную в предыдущем разделе методом Гаусса, и применим к ней правило Крамера. Найдем все нужные определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -105 \neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -15 & -1 & -5 \\ 19 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -105, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -15 & -5 \\ 5 & 19 & 4 \end{vmatrix} = -210, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -15 \\ 5 & 1 & 19 \end{vmatrix} = -315.$$

Отсюда $x = \dfrac{-105}{-105} = 1, y = \dfrac{-210}{-105} = 2, z = \dfrac{-315}{-105} = 3.$

2. $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 8 \end{cases}.$

Здесь $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$ поскольку имеет два одинаковых столбца.

Следовательно, система не имеет единственного решения. Найдем Δ_x, Δ_y и Δ_z:

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0,$ поэтому система имеет бесконечно много решений.

3. $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 10 \end{cases}.$

Для этой системы $\Delta = \Delta_x = 0,$ но $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$ следовательно, решений нет.

Операции над матрицами, их свойства. Обратная матрица, ее вычисление.

Матричная запись системы линейных уравнений. Решение матричных уравнений и линейных систем с помощью обратной матрицы

Определение 3.1. Матрицы одинаковой размерности называются **равными**, если у них соответственно равны элементы, стоящие на одинаковых местах.

Определение 3.2. Матрица называется **нулевой**, если все ее элементы равны 0.

Определение 3.3. Квадратная матрица называется **единичной**, если элементы, стоящие на ее главной диагонали, равны 1, а остальные равны 0.

Линейные операции над матрицами

Определение 3.4. **Суммой матриц** A и B одинаковой размерности $m \times n$ называется матрица C той же размерности, каждый элемент которой равен сумме элементов матриц A и B, стоящих на тех же местах: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n.$

Свойства сложения:

1. A + B = B + A.
2. (A + B) + C = A + (B + C) .
3. Если O – нулевая матрица, то A + O = O + A = A

Замечание 1. Справедливость этих свойств следует из определения операции сложения матриц.

Замечание 2. Отметим еще раз, что складывать можно только матрицы **одинаковой размерности.**

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad C = A + B = \begin{pmatrix} 1-2 & -3+1 \\ 2+3 & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Определение 3.5. **Произведением матрицы на число** называется матрица той же размерности, что и исходная, все элементы которой равны элементам исходной матрицы, умноженным на данное число.

Свойства умножения матрицы на число:

1. (km)A=k(mA).
2. k(A + B) = kA + kB.
3. (k + m)A = kA + mA.

Замечание 1. Справедливость свойств следует из определений 3.4 и 3.5.

Замечание 2. Назовем разностью матриц А и В матрицу С, для которой С + В =А, т.е. С = А + (-1)В.

Пример:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $-4A = \begin{pmatrix} -12 & -8 \\ 20 & -4 \end{pmatrix}$.

Определение 3.6. **Произведением матрицы А размерности m$\times$p и матрицы В размерности** $p\times n$ называется матрица С размерности $m\times n$, каждый элемент которой c_{ij} определяется формулой: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}, i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n.$

Таким образом, элемент c_{ij} представляет собой сумму произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В.

Пример:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. При этом существует произведение АВ, но не существует произведение ВА. Размерность матрицы С=АВ составляет 2×3.

Найдем элементы матрицы С:

$$c_{11} = 2\cdot 3 + (-1)(-2) = 8, c_{12} = 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 = 1, c_{13} = 2\cdot(-5) + (-1)\cdot 4 = -14,$$

$$c_{21} = 4\cdot 3 + 5\cdot(-2) = 2, c_{22} = 4\cdot 1 + 5\cdot 1 = 9, c_{23} = 4\cdot(-5) + 5\cdot 4 = 0.$$

Итак, $C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -14 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$

Теорема 3.1 Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей.

Замечание. Операция перемножения матриц некоммутативна, т.е. $AB \neq BA$. Действительно, если существует произведение AB, то BA может вообще не существовать из-за несовпадения размерностей (см. предыдущий пример). Если существуют и AB, и BA, то они могут иметь разные размерности (если $m \neq n$).

Для квадратных матриц одного порядка произведения AB и BA существуют и имеют одинаковую размерность, но их соответствующие элементы в общем случае не равны.

Однако в некоторых случаях произведения AB и BA совпадают.

Рассмотрим произведение квадратной матрицы A на единичную матрицу E того же порядка:

$$AE = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A.$$

Тот же результат получим и для произведения EA. Итак, для любой квадратной матрицы A **AE = EA =A.**

Обратная матрица

Определение 3.7. Квадратная матрица A называется **вырожденной**, если $\Delta_A = 0$, и **невырожденной**, если $\Delta_A \neq 0$.

Определение 3.8. Квадратная матрица B называется **обратной** к квадратной матрице A того же порядка, если $AB = BA = E$. При этом B обозначается A^{-1}.

Рассмотрим условие существования матрицы, обратной к данной, и способ ее вычисления.

Теорема 3.2. Для существования обратной матрицы необходимо и достаточно, чтобы исходная матрица была невырожденной.

Замечание. Сформулируем еще раз **способ вычисления обратной матрицы:** ее элементами являются алгебраические дополнения к элементам транспонированной матрицы А, деленные на ее определитель.

Пример:

Найдем матрицу, обратную к $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

$\Delta_A = -6 \neq 0,$ следовательно, матрица А невырожденная. Найдем алгебраические дополнения к ее элементам:

$A_{11} = -1, A_{12} = 7, A_{13} = 2, A_{21} = -1, A_{22} = -5, A_{23} = -4, A_{31} = -1, A_{32} = 1, A_{33} = 2.$ Не забудем, что алгебраические дополнения к элементам **строки** матрицы А образуют в обратной матрице **столбец** с тем же номером. Итак,

$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$ Можно убедиться, что найденная матрица действительно удовлетворяет определению A^{-1}. Найдем

$$A \cdot A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Тот же результат получим и при перемножении в обратном порядке.

Решение линейных систем с помощью обратной матрицы

Рассмотрим линейную систему (2.3): $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ и введем следующие обозначения:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - матрица системы, $$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - столбец неизвестных,

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$ - столбец свободных членов. Тогда систему (2.3) можно записать в виде матричного уравнения: AX = B.

(3.1)

Пусть матрица A – невырожденная, тогда существует обратная к ней матрица A^{-1}.

Умножим обе части равенства (3.1) слева на A^{-1}. Получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Но $A^{-1}A = E,$ тогда $EX = A^{-1}B$, а поскольку $EX = X, X = A^{-1}B.$ (3.2)

Итак**, решением матричного уравнения (3.1) является произведение матрицы, обратной к A, на столбец свободных членов системы (2.3).**

Пример: Вернемся к системе $\begin{cases} x+3y-z=4 \\ 2x-y-5z=-15. \\ 5x+y+4z=19 \end{cases}$

Для нее $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 \\ -15 \\ 19 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$ $\Delta_A=-105.$ Найдем A^{-1}:

$A_{11}=1, A_{12}=-33, A_{13}=7, A_{21}=-13, A_{22}=9, A_{23}=14, A_{31}=-16, A_{32}=3, A_{33}=-7.$

Следовательно,

$$A^{-1}=-\frac{1}{105}\begin{pmatrix} 1 & -13 & -16 \\ -33 & 9 & 3 \\ 7 & 14 & -7 \end{pmatrix}, A^{-1}B=-\frac{1}{105}\begin{pmatrix} 1\cdot 4-13(-15)-16\cdot 19 \\ -33\cdot 4+9(-15)+3\cdot 19 \\ 7\cdot 4+14(-15)-7\cdot 19 \end{pmatrix}=-\frac{1}{105}\begin{pmatrix} -105 \\ -210 \\ -315 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Вопросы для самопроверки по разделу I Линейная алгебра

1. Что называется матрицей? Как определяются линейные операции над матрицами и каковы их свойства? Приведите примеры.

2. Что называется определителем? Каковы основные свойства определителей?

3. Что называется минором и алгебраическим дополнением? Приведите примеры.

4. Каковы способы вычисления определителей? Приведите примеры.

5. Что называется матрицей и расширенной матрицей системы линейных уравнений? Приведите примеры.

6. Что называется решением системы линейных уравнений? Какие системы называются совместными, а какие — несовместными?

7. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.

8. Напишите формулы Крамера. В каком случае они применимы?

9. При каком условии система линейных уравнений имеет единственное решение?

10. Что можно сказать о системе линейных уравнений, если ее определитель равен нулю?

11. При каком условии однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение?

12. Опишите метод Гаусса решения и исследования систем линейных уравнений.

13. Что называется рангом системы линейных уравнений? Как, используя метод Гаусса, можно найти ранг системы линейных уравнений?

14. Какие неизвестные в системе линейных уравнений и в каком случае называются свободными, а какие базисными? Что называется общим решением системы линейных уравнений?

15. Что называется рангом матрицы? Как его можно найти?

16. Что называется произведением двух матриц? Каковы свойства произведения матриц?

17. Какая матрица называется единичной?

18. Какая матрица называется обратной для данной матрицы? Всегда ли существует обратная матрица? Как можно найти обратную матрицу?

19. В чем состоит матричный способ решения систем линейных уравнений?

Раздел II. Введение в математический анализ

Тема 1. Теория пределов

Определение 1.1.: Число А называется **пределом функции *y=f(x)*** при *x,* стремящемся к a, если для любой последовательности чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, .x_n, \ldots$ сходящейся к числу a, следует, что последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \ldots$ сходится к числу А.

Предел функции в точке a обозначается

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Основные теоремы о пределах

1. $\lim\limits_{x \to a} C = C$

2. $\lim\limits_{x \to a} x = a$

3. $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

4. $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

5. $\lim\limits_{x \to a}(f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)^n$

6. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

! **Все правила имеют смысл, если пределы функций** $f(x)$ **и** $g(x)$ **существуют.**

Используются также следующие пределы:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(первый замечательный предел);

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e = 2{,}71828$$

(второй замечательный предел).

Техника вычисления пределов

При вычислении предела элементарной функции *f(x)* приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

- Функция *f(x)* определена в предельной точке *x* = *a*. Тогда

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

- Функция *f(x)* в предельной точке *x* = *a* не определена или же вычисляется предел функции при $x \to \infty$. Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода.

Необходимо помнить, что

$$\frac{C}{\infty} = 0, \ \frac{\infty}{C} = \infty, \ \infty + C = \infty, \ \frac{0}{C} = 0, \ \frac{C}{0} = \infty, \ 0 + C = C.$$

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция *f(x)* в точке *x* = *a* или при $x \to \infty$ представляет собой неопределенность (типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$).

При вычислении пределов при $x \to \infty$ основные теоремы о пределах сохраняют силу и, кроме того, используются правила:

а) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$, необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на наибольшую степень переменной;

б) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на наименьшую степень переменной ;

в) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, иногда достаточно числить и знаменатель дроби разложить на множители и затем сократить дробь на множитель, приводящий к неопределенности;

г) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, зависящую от иррациональности, достаточно перевести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и сократить на множитель, приводящий к неопределенности;

д) чтобы раскрыть неопределенность типа $\infty - \infty$, необходимо числитель и знаменатель дроби одновременно умножить на сопряженное выражение и тем самым свести к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$.

Вычислить пределы функций:

Пример 1: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2}{x^3-1}=\dfrac{2\cdot 2^2}{2^3-1}=\dfrac{8}{7}$

Пример 2: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{x-1}=\dfrac{5}{1-1}=\left(\dfrac{5}{0}\right)=\infty$

Пример 3: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x+4}{1+3x^2-x^3}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{5x^3}{x^3}-\dfrac{2x}{x^3}+4}{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3x^2}{x^3}-\dfrac{x^3}{x^3}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x}-1}=\frac{5-\dfrac{2}{\infty}+\dfrac{4}{\infty}}{\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{3}{\infty}-1}=\frac{5-0+0}{0+0-1}=-5$$

Пример 4: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{1-x^2}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-2)(x-1)}{-(x-1)(x+1)}=$

$$=\left|\begin{array}{c} x^2-3x+2=0 \\ D=3^2-4\cdot 2=1 \\ x_1=\dfrac{3+1}{2}=2,\quad x_2=\dfrac{3-1}{2}=1 \end{array}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{-x-1}=\frac{1-2}{-1-1}=\frac{-1}{-2}=0{,}5$$

Пример5: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-2}{3x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{4-x}-2)(\sqrt{4-x}+2)}{3x(\sqrt{4-x}+2)}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4-x-4}{3x(\sqrt{4-x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{3x(\sqrt{4-x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{3\cdot(\sqrt{4-x}+2)}=-\frac{1}{12}$$

Пример 6:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 5}\frac{(x^2-25)(2+\sqrt{x-1})}{(2-\sqrt{x-1})(2+\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to 5}\frac{(x^2-25)(2+\sqrt{x-1})}{4-(x-1)}=$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)(2+\sqrt{x-1})}{-(x-5)}=-\lim_{x\to 5}(x+5)(2+\sqrt{x-1})=-10\cdot 4=-40.$$

Пример 7:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Теорему о пределе частного здесь применить нельзя, так как числитель и знаменатель дроби конечного предела не имеют. В данном случае имеем неопределённость вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Разделим числитель и знаменатель дроби на высшую степень x (в данном случае на x^2), а затем воспользуемся теоремами о пределах функций:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{4}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{x^4}{x^4}+\dfrac{1}{x^4}}}=\frac{2}{1}=2\cdot$$

Здесь мы воспользовались следующим равенством: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x}=0$ (a – любое число).

Пример 8:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5.\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5$$

Пример 9:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left[1+\frac{1}{x/8}\right]^{x/8}\right)^8=\left(\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x/8}\right]^{\frac{x}{8}}\right)^8=e^8$$

Пример 10:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 5}\frac{(x^2-25)(2+\sqrt{x-1})}{(2-\sqrt{x-1})(2+\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to 5}\frac{(x^2-25)(2+\sqrt{x-1})}{4-(x-1)}=$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)(2+\sqrt{x-1})}{-(x-5)}=-\lim_{x\to 5}(x+5)(2+\sqrt{x-1})=-10\cdot 4=-40.$$

Вопросы для самопроверки по теме 1 Теория пределов:

1. Что называется функцией?
2. Что такое область определения и область значений функции
3. Перечислите способы задания функций, их достоинства.
4. Перечислите основные свойства функций.
5. Дайте определение предела функции в точке.
6. Какая функция называется непрерывной в точке?
7. Сформулируйте основные свойства пределов.
8. Как раскрывается неопределенность вида $0/0$, ∞/∞ ?

Тема 2. Дифференциальное исчисление

Определение производной

Определение 2.1: **Производной функции** $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения ее приращения $\Delta f(x)$ к приращению Δx аргумента х, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Если этот предел конечный, то функция *y=f(x)* называется **дифференцируемой** в точке *x*. Если же этот предел есть ∞, то говорят, что функция *y=f(x)* имеет в точке *x* бесконечную производную.

Механический смысл производной: скорость есть первая производная пути по времени, т.е. $v = S'(t)$.

Геометрический смысл производной: тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ равен первой производной этой функции , вычисленной в точке касания, т.е. $tg\alpha = f'(x)$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$y = f(x\ ) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Таблица производных

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(u + v - w)' = u' + v' - w'$	$(\sin x)' = \cos x$
$(C \cdot u)' = C \cdot u'$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(C)' = 0$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x)' = 1$	
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	
$(e^x)' = e^x$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Процесс нахождения производных называется дифференцированием функции.

Найти производные функций:

Пример 1: $y = 3x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 2\sin x + 9$

$$y' = \left(3x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 2\sin x + 9\right)' = (3x^2)' + (\sqrt[3]{x^2})' + (2\sin x)' + 9' =$$

$$= 6x + (x^{\frac{2}{3}})' + 2\cos x + 0 = 6x + \frac{2}{3}x^{(\frac{2}{3}-1)} + 2\cos x = 6x + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} +$$

$$+ 2\cos x = 6x + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + 2\cos x = 6x + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2\cos x$$

Пример 2: $y = x^2 \cdot \ln x$

$$y' = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x$$

Пример 3: $y = \dfrac{1+x^2}{5^x}$

$$y' = \frac{(1+x^2)'5^x - (1+x^2)(5^x)'}{5^x} = \frac{2x \cdot 5^x - (1+x^2) \cdot 5^x \ln 5}{(5^x)^2} =$$

$$= \frac{5^x(2x - (1+x^2)\ln 5)}{5^{2x}} = \frac{2x - \ln 5 + x^2 \ln 5}{5^x}$$

Дифференцирование сложной функции

Пусть *y= y(u)* , где *u= u(x)* – дифференцируемые функции. Тогда сложная функция *y=y[u(x)]* есть также дифференцируемая функция.

Производные сложных функций находятся при помощи таблицы:

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$$

$$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$$

$$(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1: Найти производную функции $y = \ln tg 5x$

Решение: $y' = \left(\ln tg 5x\right)' = \frac{1}{tg 5x}(tg 5x)' = \frac{1}{tg 5x} \cdot \frac{1}{\cos^2 5x}(5x)' = \frac{\cos 5x}{\sin 5x} \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5 =$

$= \frac{5}{\sin 5x \cdot \cos 5x} = \frac{5}{\frac{1}{2}\sin 10x} = \frac{10}{\sin 10x}$

Пример 2: Найти производную функции $y = x \sin^2 \sqrt{2x-1}$

Решение: $y' = \left(x \sin^2 \sqrt{2x-1}\right)' = x' \cdot \sin^2 \sqrt{2x-1} + x \cdot (\sin^2 \sqrt{2x-1})' =$

$= \sin^2 \sqrt{2x-1} + x \cdot (2 \sin \sqrt{2x-1}) \cdot (\sin \sqrt{2x-1})' =$

$= \sin^2 \sqrt{2x-1} + 2x \cdot \sin \sqrt{2x-1} \cdot \cos \sqrt{2x-1} \cdot (\sqrt{2x-1})' =$

$= \sin^2 \sqrt{2x-1} + x \cdot \sin\left(2\sqrt{2x-1}\right) \cdot \frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}} = \sin^2 \sqrt{2x-1} +$

$+ x \cdot \sin\left(2\sqrt{2x-1}\right) \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \sin^2 \sqrt{2x-1} + \frac{x \sin\left(2\sqrt{2x-1}\right)}{\sqrt{2x-1}}$

Производные высших порядков

Определение2.2: **Производная второго порядка** (вторая производная) от функции y=f(x) есть производная от ее первой производной: $y'' = [f'(x)]'$.

Определение 2.3: **Производная третьего порядка** (третья производная) от функции y=f(x) есть производная от ее второй производной: $y''' = [f''(x)]'$.

Определение 2.4: **Производная n-ого порядка** (*n*-я производная) от функции *y=f(x)* есть производная от ее (*n-1*)-й производной: $y^{(n)} = [f^{(n-1)}(x)]'$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1: Найти производную второго порядка $y = \frac{x^2+1}{x-1}$.

Решение: $y' = \left(\dfrac{x^2+1}{x-1}\right)' = \dfrac{(x^2+1)'\cdot(x-1)-(x^2+1)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2} =$

$$= \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2-2}{(x-1)^2}$$

$$y'' = \left(\frac{(x-1)^2-2}{(x-1)^2}\right)' = \frac{\left[(x-1)^2-2\right]'(x-1)^2-\left[(x-1)^2-2\right]\cdot\left[(x-1)^2\right]'}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{\left[2(x-1)(x-1)'-(2)'\right](x-1)^2-\left[(x-1)^2-2\right]2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2(x-1)^3-2(x-1)^3-4(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-4}{(x-1)^3}$$

Пример2: Найти производную второго порядка функции $y = e^{x^3}$.

Решение: $y' = (e^{x^3})' = e^{x^3}\cdot(x^3)' = e^{x^3}\cdot 3x^2$

$$y'' = (3x^2\cdot e^{x^3})' = (3x^2)'\cdot e^{x^3} + 3x^2\cdot(e^{x^3})' = 6x\cdot e^{x^3} + 3x^2\cdot e^{x^3}\cdot 3x^2 =$$
$$= e^{x^3}(6x+9x^4) = 3xe^{x^3}(2+3x^3).$$

Исследование функции с помощью производной

Определение 2.5: Точка x_0 называется **точкой локального максимума**, если для любого x из окрестности точки x_0 выполняется неравенство:

$$f(x_0) > f(x).$$

Определение 2.6: Точка x_0 называется точкой **локального минимума,** если для любого x из окрестности точки x_0 выполняется неравенство:

$$f(x_0) < f(x).$$

Точки минимума и максимума функции называются **точками экстремума** данной функции, а значения функции в этих точках – экстремумами функции.

Точками экстремума могут служить только критические точки I рода, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Правило нахождения экстремумов функции $y = f(x)$ с помощью первой производной

1. Найти производную функции $f'(x)$.

2. Найти критические точки по первой производной, т.е. точки, в которых производная обращается в нуль или терпит разрыв.

3. Исследовать знак первой производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. Если на промежутке $f'(x) < 0$, то на этом промежутке функция убывает; если на промежутке $f'(x) > 0$, то на этом промежутке функция возрастает.

4. Если в окрестности критической точки $f'(x)$ меняет знак

с «+» на «-», то эта точка является точкой максимума, если с «-» на «+», то точкой минимума.

5. Вычислить значения функции в точках минимума и максимума.

С помощью приведенного алгоритма можно найти не только экстремумы функции, но и промежутки возрастания и убывания функции.

Пример 1: Найти промежутки монотонности и экстремумы функции: $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Решение: Найдем первую производную функции $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Найдем критические точки по первой производной, решив уравнение

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x \cdot (x - 2) = 0$$

$$x = 0 \quad или \quad x = 2$$

Исследуем поведение первой производной в критических точках и на промежутках между ними.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	т. max 0	↘	т. min -4	↗

$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$

$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$

Ответ: Функция возрастает при $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$;

функция убывает при $x \in (0; 2)$;

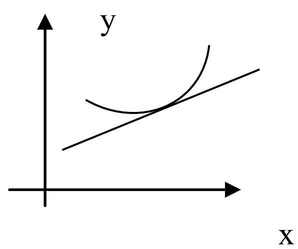
точка минимума функции $(2; -4)$;

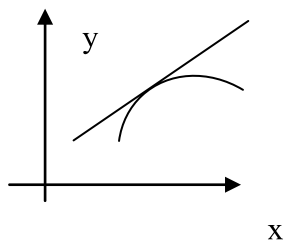
точка максимума функции $(0; 0)$.

Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба

Определение 2.7: Кривая $y = f(x)$ называется **выпуклой вниз** в промежутке $(a; b)$, если она лежит выше касательной в любой точке этого промежутка.

Определение 2.8 : Кривая $y = f(x)$ называется **выпуклой вверх** в промежутке $(a; b)$, если она лежит ниже касательной в любой точке этого промежутка.

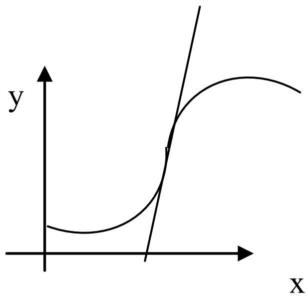




Определение 2.9: Промежутки, в которых график функции обращен выпуклостью вверх или вниз, называются **промежутками выпуклости** графика функции.

Выпуклость вниз или вверх кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, характеризуется знаком ее второй производной: если в некотором промежутке $f''(x) > 0$, то кривая выпукла вниз на этом промежутке; если же $f''(x) < 0$, то кривая выпукла вверх на этом промежутке.

Определение 2.10: Точка графика функции $y = f(x)$, разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика, называется **точкой перегиба**.



Точками перегиба могут служить только критические точки II рода, т.е. точки, принадлежащие области определения функции $y = f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Правило нахождения точек перегиба графика функции $y = f(x)$

1. Найти вторую производную $f''(x)$.

2. Найти критические точки II рода функции $y = f(x)$, т.е. точки, в которой $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

3. Исследовать знак второй производной $f''(x)$ в промежутка, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. Если при этом критическая точка x_0 разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то x_0 является абсциссой точки перегиба графика функции.

4. Вычислить значения функции в точках перегиба.

Пример 1: Найти промежутки выпуклости и точки перегиба следующей кривой: $f(x) = 6x^2 - x^3$.

Решение: Находим $f'(x) = 12x - 3x^2$, $f''(x) = 12 - 6x$.

Найдем критические точки по второй производной, решив уравнение $12 - 6x = 0$.

$x = 2$.

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$		точка перегиба 16	

$f(2)=6\cdot 2^2-2^3=16$

Ответ: Функция выпукла вверх при $x\in(2;+\infty)$;

функция выпукла вниз при $x\in(-\infty;2)$;

точка перегиба $(2;16)$.

Общая схема для построения графиков функций

1. Найти область определения функции $D(y)$.
2. Найти точки пересечения графика функций с осями координат.
3. Исследовать функцию на четность или нечетность.
4. Исследовать функцию на периодичность.
5. Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции.
6. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции.
7. Найти асимптоты функции.
8. По результатам исследования построить график .

Пример: Исследовать функцию и построить ее график:

$$y=x^3-3x.$$

Решение:

1) Функция определена на всей числовой оси, т. е. ее область определения $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

2) Найдем точки пересечения с осями координат:

с осью ОХ : решим уравнение $x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0,\quad x=0\quad или\quad x=\pm\sqrt{3}$.

с осью ОY: $y(0)=0^3-3\cdot 0=0$

3) Выясним, не является ли функция четной или нечет

ной:

$y(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=-(x^3-3x)=-y(x)$.

Отсюда следует, что функция является нечетной.

4) Функция непериодична.

5) Найдем промежутки монотонности и точки экстремума функции: $y' = 3x^2 - 3$.

Критические точки: $3x^2 - 3 = 0, \quad x^2 = 1, \quad x = \pm 1$.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	т. max 2	$\searrow$	т. min -2	$\nearrow$

$y(0) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2$

$y(2) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$

6) Найдем промежутки выпуклости и точки перегиба функции: $y'' = 6x$

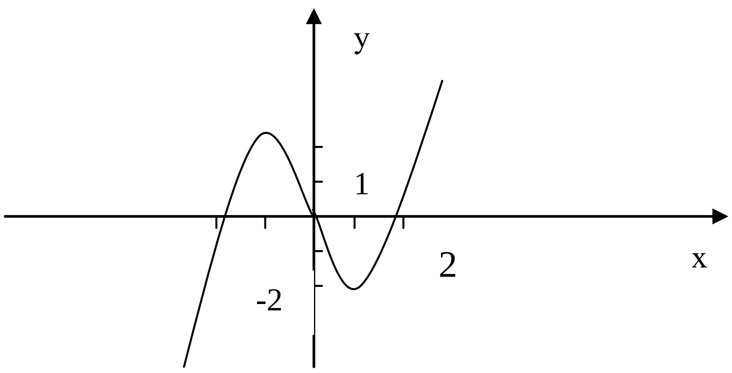
Критические точки: $6x = 0, \quad x = 0$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y''	-	0	+
y	$\frown$	точка перегиба 0	$\smile$

$y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$

7) Функция непрерывна, асимптот у нее нет.

8) По результатам исследования построим график функции:



Вопросы для самопроверки теме 2 Дифференциальное исчисление:

1. Дать определение производной функции.
2. Что называется приращением аргумента, приращением функции?
3. Какой механический смысл имеет производная?
4. Сформулировать геометрический смысл производной.
5. Как найти производную суммы или разности?
6. Как найти производную произведения?
7. Как найти производную частного двух функций?
8. Сформулируйте правила нахождения производной сложной функции?
9. Как найти производную второго порядка? производную четвертого порядка.
10. Что такое критические точки функции?
11. Сформулировать достаточные условия возрастания и убывания функции.
12. Какими точками отделяются промежутки возрастания от промежутков убывания функции?
13. Сформулируйте правила нахождения точек экстремума функции.
14. Сформулировать достаточное условие выпуклости функции. Приведите алгоритм нахождения промежутков выпуклости и точек перегиба.

Тема 3. Интегральное исчисление

Неопределенный интеграл. Методы вычисления

Определение 3.1: Функция *F(x)* называется **первообразной для функции *f(x)*,** если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Любая непрерывная функция *f(x)* имеет бесконечное множество первообразных, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Определение 3.2 **:** Совокупность *F(x)+C* всех первообразных для функции *f(x)* называется **неопределенным интегралом** от этой функции и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$;
3. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
4. $\int d\left(f(x)\right) = f(x) + C$;
5. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
6. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование предполагает использование при нахождении неопределенных интегралов таблицы интегралов

Таблица интегралов

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \qquad \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad \int a^{kx+b}dx = \frac{a^{kx+b}}{k \cdot \ln a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C \qquad \int e^{ax+b}dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C$$

$$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2} \cdot \ln\left|a^2 \pm x^2\right| + C \qquad \int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C \qquad \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \cdot \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Рассмотрим нахождение интегралов непосредственным методом.

Пример 1: Найти неопределенный интеграл:

$$\int\left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right)dx.$$

Решение: $\int\left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right)dx =$

$$= \int 5\cos xdx + \int 2dx - \int 3x^2dx + \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{4}{x^2+1}dx =$$

$$= 5\int \cos xdx + 2\int dx - 3\int x^2dx + \int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= 5\sin x + 2x - 3\frac{x^3}{3} + \ln|x| - 4 \cdot arctgx + C =$$

$$= 5\sin x + 2x - x^3 + \ln|x| - 4 \cdot arctgx + C.$$

Пример 2: Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{x^2 - 2}{x^2}dx$.

Решение: $\int \frac{x^2-2}{x^2}dx = \int \frac{x^2}{x^2}dx - \int \frac{2}{x^2}dx = \int dx - 2\int x^{-2}dx =$

$$= x - 2\frac{x^{-1}}{-1} + C = x + \frac{2}{x} + C.$$

Пример 3: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^2dx}{x^2+1}$

Решение: $\int \frac{x^2dx}{x^2+1} = \int \frac{(x^2+1-1)dx}{x^2+1} = \int \frac{(x^2+1)dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} =$

$$= \int dx - arctgx + C = x - arctgx + C$$

Метод подстановки в неопределенном интеграле (метод замены переменной)

Этот метод заключается в том, что заменяют переменную x на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx = \varphi'(t)dt$ и получают $\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

При этом получают искомую функцию, выраженную через переменную t. Для возвращения к переменной x необходимо заменить t значением $t = \psi(x)$, которое находится из соотношения $x = \varphi(t)$.

Рассмотрим нахождение интегралов методом подстановки.

Пример 1: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

Решение: $\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \begin{vmatrix} \ln x = t; \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C =$

$$= -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$$

Пример 2: Найти неопределенный интеграл $\int ctgxdx$

Решение: $\int ctgxdx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \begin{vmatrix} \sin x = t; \\ dt = \cos dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$

$$= \ln|\sin x| + C$$

Пример 3: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x}$

Решение: $\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x} = \begin{vmatrix} e^x = t \\ dt = e^x dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = tgt + C = tge^x + C$

Пример 4: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{4+25x^2}$

Решение: $\int \frac{dx}{4+25x^2} = \int \frac{dx}{2^2+(5x)^2} = \begin{vmatrix} 5x = t \\ dt = 5dx \\ dx = \frac{1}{5}dt \end{vmatrix} = \int \frac{\frac{1}{5}dt}{2^2+t^2} =$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C = \frac{1}{10} arctg \frac{5x}{2} + C$.

Определенный интеграл и его свойства

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Разобьем отрезок на n частей точками $a < x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку ξ_k и обозначим через Δx_k длину каждого такого отрезка.

Интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n$$

Определение 3.3: **Определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Для любой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, всегда существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$

Простейшие свойства определенного интеграла

1) Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

3) При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4) Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю: $\int_a^a f(x)dx = 0$

5) Отрезок интегрирования можно разделить на части*:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

c-точка, лежащая между *a* и *b*.

6) Если $f(x) \le g(x)$ на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x) \le \int_a^b g(x)$.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$, в том случае , когда можно найти соответствующую первообразную $F(x)$, служит формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Рассмотрим нахождение простейших определенных интегралов.

Пример 1: Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$.

Решение: $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$

Пример 2: Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$.

Решение: $$\int\limits_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx = \int\limits_1^9 \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int\limits_1^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right)\Bigg|_1^9 = \left(\frac{2}{3} x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \right)\Bigg|_1^9 = \left(\frac{2}{3} 9\sqrt{9} - 2\sqrt{9} \right) - \left(\frac{2}{3} 1\sqrt{1} - 2\sqrt{1} \right) =$$

$$= 12 + \frac{4}{3} = 13\frac{1}{3}.$$

Вычисление определенного интеграла методом замены переменной

При вычислении определенного интеграла методом замены переменной (способом подстановки) определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ преобразуется с помощью подстановки $t = \varphi(x)$ или $x = \psi(t)$ в определенный интеграл относительно новой переменной t. При этом старые пределы интегрирования a и b заменяются соответственно новыми пределами t_1 и t_2, которые находятся из исходной подстановки.

Из первой подстановки новые пределы интегрирования вычисляются непосредственно: $t_1 = \varphi(a), \quad t_2 = \varphi(b)$.

Из второй подстановки новые пределы интегрирования находятся путем решения уравнений $a = \psi(t_1), \quad b = \psi(t_2)$.

Таким образом, имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[\psi(t)] \cdot \psi'(t)dt$$

Пример 1: Вычислить определенный интеграл методом замены переменной $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$

Решение: $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx = \left| \begin{matrix} t = \cos x, & t_1 = \cos 0 = 1 \\ dt = -\sin x dx, & t_2 = \cos(\pi/2) = 0 \\ \sin x dx = -dt & \end{matrix} \right| = -\int\limits_1^0 t^2 dt = -\left.\frac{t^3}{3}\right|_1^0$

$= -\frac{1}{3} \cdot (0^3 - 1^3) = \frac{1}{3}$.

Пример 2: Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

Решение: $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{matrix} x = t^2 & t_1 = \sqrt{1} = 1 \\ dx = 2tdt & t_2 = \sqrt{4} = 2 \end{matrix} \right| = \int\limits_1^2 \frac{2tdt}{t+1} =$

$$= 2\int\limits_1^2 \frac{(t+1)-1}{t+1} dt = 2\int\limits_1^2 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2\left(t - \ln(t+1)\right)\Big|_1^2 =$$

$= 2(2 - \ln 3) - 2(1 - \ln 2) = 2 + 2\ln\frac{2}{3}$.

Вопросы для самопроверки по теме 3 Интегральное исчисление:

1. В чем заключается смысл действия, обратного дифференцированию?
2. Дать определение первообразной функции
3. Чем отличаются друг от друга любые две первообразные данной функции $f(x)$?
4. Как проверить, правильно ли найдена первообразная данной функции $f(x)$?
5. Дать определение неопределенного интеграла.
6. Перечислить свойства неопределенного интеграла
7. Дать определение определенного интеграла.
8. Перечислить свойства определенного интеграла.

9. Запишите формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла.

10. В чем отличия методов замены переменной в определенном и неопределенном интегралах?

Тема 4. Основы теории комплексных чисел

Рассмотрим уравнение вида: x^2-4=0. Оно имеет действительные корни 2 и -2. Уравнение x^2-4=0 действительных корней не имеет. Возникает необходимость введения новых чисел.

Определение 4.1.. Комплексными числами называют выражения вида a + bi, где a и b- действительные числа, а i - мнимая единица, причем i^2=-1.

Алгебраическая форма комплексного числа.

Если $x, y \in R$, то число $z = x + yi$ называется комплексным числом, заданным в алгебраической форме

$z = x + yi$ (2.3)

Это число имеет действительную часть $x = \operatorname{Re} z$

и мнимую часть $y = \operatorname{Im} z$.

Так что $z = \operatorname{Re} z + i \cdot \operatorname{Im} z$

$\bar{z} = x - yi$ - число, сопряженное z.

Пример:

Найти действительную и мнимую части комплексных чисел а)z_1=6-5i , б)z_2= i.

Решение: а) 6 - действительная часть, -5 – мнимая часть;

б) 0 - действительная часть, 1 – мнимая часть.

Сумма комплексных чисел

Определение 4.2. Суммой двух комплексных чисел a + bi и c + di будем называть комплексное число (a + c) + (b + d)i.

Определение 4.3. Произведением двух комплексных чисел a + bi и c + di будем называть комплексное число (ac - bd) + (ad + bc)i.

Пример:

Найти сумму и произведение комплексных чисел z_1=2-5i , z_2= -7+i.

$z_1 + z_2$=(2 – 7) + (-5 + 1)i;

$z_* z_2$=(-14 +5) +(2 + 35)i=-9 + 37i.

Модуль комплексного числа

Определение 4.4.. Модулем комплексного числа z =a + bi называется число $\sqrt{a^2+b^2}$ и обозначается $|z|$, т.е. $|z| = |\grave{a} + \mathrm{bi}| = \sqrt{a^2+b^2}$.

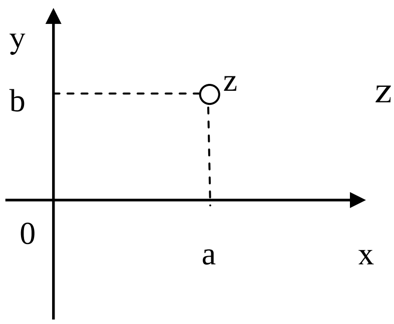
Пример:

Найти модуль комплексных чисел: а) 2-5i, б) -7+i.

Решение а) $|2 - 5\mathrm{i}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$;

б) $|-7 + \mathrm{i}| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Геометрическая интерпретация комплексного числа.

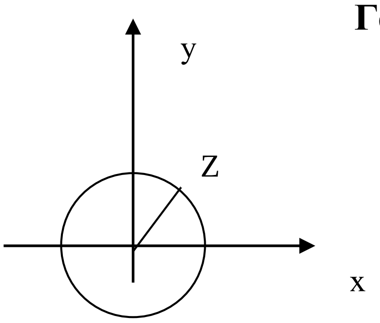


z =a + bi

ОХ - действительная ось,

ОУ – мнимая ось.

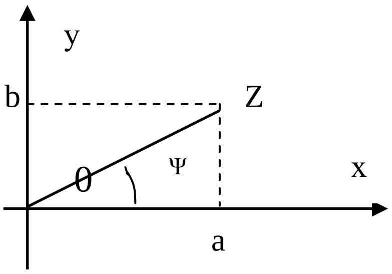
Геометрический смысл модуля комплексного числа



z =a + bi

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ — расстояние от начала координат до точки Z.

Тригонометрическая форма комплексного числа



z = r(cos Ψ + i sin Ψ), где r = $|z|$, т.е.

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

Итак, для того, чтобы комплексное число, заданное в алгебраической форме, обратить в тригонометрическую форму, необходимо найти его модуль r и аргумент j, пользуясь формулами:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ \sin\varphi = \frac{y}{r};\ \cos\varphi = \frac{x}{r}.$$

Пример: Дано $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, записать тригонометрическую форму комплексного числа.

Решение:

Дано $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ - алгебраическая форма.

$a = -\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, $r = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2+2} = 2$,

$$\varphi = arctg\,\frac{\sqrt{2}}{\left(-\sqrt{2}\right)} = arctg\left(-1\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

$z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ - тригонометрическая форма.

Формулы Муавра

Возведение в целую степень n. Модуль возводится в эту степень, аргумент умножается на *n*.

$$|z^n| = |z|^n, \arg z^n = n \cdot \arg z = n\varphi$$

$$z^n = |z^n|(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = |z|^n \cdot e^{n\varphi i}. \quad (1)$$

Извлечение корня степени n. Извлекается арифметический корень из модуля, общее значение аргумента делится на *n*. Корень имеет ровно *n* различных значений, если $z \neq 0$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n} i},$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. (2)

Формулы (1) и (2 называются **формулами Муавра**

<u>Вопросы для самопроверки по теме 4 Основы теории комплексных чисел</u>

1. Что называется комплексным числом?
2. Какие интерпретации комплексных чисел вы знаете? Опишите их.
3. Что называется действительной и мнимой частями комплексного числа?
4. Что называется алгебраической и тригонометрической формами комплексного числа?
5. В каком случае два комплексных числа называются сопряженными?
6. По каким правилам производятся арифметические действия над комплексными числами?
7. Запишите формулу Муавра.

Варианты контрольных заданий

Задание 1: Дана система линейных уравнений, доказать ее совместность и решить тремя способами:

1) Методом Гаусса;
2) По формулам Крамера;
3) Средствами матричного исчисления.

Вариант 1 . $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ **Вариант 2.** $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

Вариант 3. $\begin{cases} 2x - y + 5z = 1 \\ x + 3y - 4z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$ **Вариант 4.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

Вариант 5. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$ **Вариант 6.** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

Вариант 7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ **Вариант 8.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

Вариант 9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$ **Вариант 10.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$

Вариант 11. $\begin{cases} -x - 2y + 3z = 4 \\ 3x - 4y - 2z = 5 \\ -2x - 3y + z = 2 \end{cases}$ **Вариант 12.** $\begin{cases} x - 4y - 2z = 1 \\ 3x + y + 5z = 1 \\ -2x + 3y + 3z = 2 \end{cases}$

Вариант 13. $\begin{cases} 2x - 3y - 3z = 1 \\ 3x + 4y + 2z = -1 \\ x - 2y - 2z = 1 \end{cases}$ **Вариант 14.** $\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 2z = 5 \\ x + 4y + 3z = 3 \end{cases}$

Вариант 15. $\begin{cases} 3x-2y-3z=1 \\ x+2y-3z=1 \\ 2x-y-z=2 \end{cases}$

Вариант 16. $\begin{cases} 2x+2y+3z=1 \\ 2x-y-3z=1 \\ x+2y+4z=1 \end{cases}$

Вариант 17. $\begin{cases} 2x-2y-z=1 \\ x+y+2z=-1 \\ 3x-2y-2z=-1 \end{cases}$

Вариант 18. $\begin{cases} 2x-3y+2z=2 \\ 3x+2y-2z=1 \\ x+3y-2z=1 \end{cases}$

Вариант 19. $\begin{cases} 2x+3y-2z=1 \\ 3x-y-2z=-1 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$

Вариант 20. $\begin{cases} 3x-2y+3z=2 \\ x+3y-2z=-1 \\ 2x-y+z=-1 \end{cases}$

Вариант 21. $\begin{cases} 3x+2y+2z=1 \\ x-3y-2z=1 \\ 2x+4y+3z=1 \end{cases}$

Вариант 22. $\begin{cases} 3x+4y-3z=-2 \\ x+3y+z=-1 \\ 2x+2y-3z=-1 \end{cases}$

Вариант 23. $\begin{cases} 2x-3y+3z=-1 \\ 3x-y+4z=1 \\ x+3y-z=-1 \end{cases}$

Вариант 24. $\begin{cases} 3x+y+3z=-1 \\ x-3y+3z=-1 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases}$

Вариант 25. $\begin{cases} 3x+2y-3z=2 \\ 2x+y-z=-1 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$

Вариант 26. $\begin{cases} -2x+3y+4z=3 \\ -x+3y-2z=-4 \\ 3x-y+5z=3 \end{cases}$

Вариант 27. $\begin{cases} 2x+5y-z=1 \\ 3x-2y+3z=1 \\ -x-3y+2z=2 \end{cases}$

Вариант 28. $\begin{cases} 3x+2y+4z=-1 \\ 2x-3y-3z=1 \\ x+y+3z=2 \end{cases}$

Вариант 29. $\begin{cases} 3x+4y-2z=3 \\ 2x-y+z=1 \\ 4x-3y+2z=3 \end{cases}$

Вариант 30. $\begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ 3x-2y+2z=1 \\ x-y+3z=2 \end{cases}$

Задание 2: Вычислить пределы функций

Вариант 1:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+1}{x^2+4}$ б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2-4x-5}$ в) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x-7}{\sqrt{2x+11}-5}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x}{6-x}\right)^{x-2}$

Вариант 2:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4}{2x^2+3x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$ в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{4x-3}-3}$ г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos5x}{2x^2}$

Вариант 3:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)(x+2)}{2x^3+5}$ б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+6x-16}{3x^2-5x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{20-x}-x}{x^2-16}$ г) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[2x]{1+3x}$

Вариант 4:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x+5}{3x^2+7}$ б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+4x-7}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9-x}-3}{x^2+x}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$

Вариант 5:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x+1}{3x^4+5}$ б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$ в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{6x+4}-4}$ г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{3+5x}{3+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$

Вариант 6:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+6}{3x^2+7x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+5x-7}$ в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x-10}{\sqrt{5x}-5}$ г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos8x}{3x^2}$

Вариант 7:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+6x+3}{2x^2+7}$ б) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$ в) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\sqrt{2x-8}-2}{x-6}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8+x}{10+x}\right)^{2x+3}$

Вариант 8:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+5}{3x^2+7x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$ в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x-15}{\sqrt{2x-1}-3}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-2}\right)^{x^2}$

Вариант 9:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x^2}{3x^2+5x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{2x}$

Вариант 10:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-5x^2}{2x^2+3x+3}$ б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-9x+18}{3x^2-17x-6}$ в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$

Вариант 11:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2-2x}{3x^3+4x^2+x}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-4x-4}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x^2+1}}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-1}\right)^{4x}$

Вариант 12:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x^2-x}{2x^5+2x-3}$ б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-7x+10}$ в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

Вариант 13:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2-4}{5x-x^2-7x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$ г) $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Вариант 14:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+9}{7x^2+10x^3+5}$ б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-x-14}{x^2+8x+12}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+9}-3}$ г) $\left(\ \dfrac{x-1}{x}\ \right)^{2-3x}$

Вариант 15:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{6x^2+4x+9}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-7x+5}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+3}\right)^{5x}$

Вариант 16:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+10x^2-3}{2x^5-5x^4+3x}$ б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{3x^2}$ г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3\tilde{o}}{\sin^2 2\tilde{o}}$

Вариант 17:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-1}{x^2+2x^3-x^4}$ б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2-4x-5}$ в) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{2x+11}-5}{7-x}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$

Вариант 18:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4}{5x^2+3x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-10x+3}{9-x^2}$ в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x-3}$ г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5\tilde{o}}{3\tilde{o}}$

Вариант 19:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+6}{1-7x+3x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{2x^2+5x-7}$ в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{2}}{x^4-16}$ г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tilde{o}^2+2\tilde{o}}{\sin 4\tilde{o}}$

Вариант 20:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-x+2x^3}{5x^3+3x^2+1}$ б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-11x+5}{25-x^2}$ в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x-10}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10}}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$

Вариант 21:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x^4+2x+3}$ б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$ в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x-8}{1-\sqrt{x-3}}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$

Вариант 22:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-6x+7}{9-2x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-5x-12}{4-x}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x}$ г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4\tilde{o}}{\tilde{o}^2}$

Вариант 23:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^6+5x^5-10x}{3x^4-x^3+x^6}$ б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{16-x^2}$ в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$

Вариант 24:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2}{1-7x+3x^4}$ б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-25}{x^2+8x+15}$ в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$ г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sin 3x}$

Вариант 25:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+14x^2}{1-2x-7x^5}$ б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{3x^2-2x-1}$ в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{5x-20}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

Вариант 26:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^3-1}{8x+3x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+x-3}{1-x}$ в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{5-\sqrt{22-x}}{x+3}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$

Вариант 27:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-5x^2+3x^5}{7+2x-x^5}$ б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{5-x^2}-\sqrt{5}}{x^2}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$

Вариант 28:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2-3x}{1-3x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$ в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{1-\sqrt{x-4}}{x-5}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$

Вариант 29:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+5}{7x^2+3x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{25-x^2}{x^2-2x-15}$ в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-5}{2-\sqrt{2x-6}}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$

Вариант 30:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2+x^3}{x-2x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+10x+21}{x^2+8x+15}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$

Задание 3 . Найти производные функций.

В пункте в) найти вторую производную:

Вариант 1:

а) $y = x \cdot tg^3(x^2 - 1)$ б) $y = \ln^2 \sin 2x$ в) $y = x^2 \cdot (\ln x - 1)$

Вариант 2:

а) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ б) $y = (e^{-\sin x} + 1)^2$ в) $y = \ln ctg\, 2x$

Вариант 3:

а) $y = \ln(arctgx)$ б) $y = \cos 2x \cdot \sin^2 x$ в) $y = x \cdot arctgx$

Вариант 4:

а) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ б) $y = \arcsin\sqrt{1-3x}$ в) $y = x^3 \cdot \ln x$

Вариант 5:

а) $y = \dfrac{\sin x}{x \cdot \cos x}$ б) $y = \ln(tg\, 2x)$ в) $y = arctgx$

Вариант 6:

а) $y = \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1})$ б) $y = 2^x \cdot \sin^2 x$ в) $y = e^{\cos 3x}$

Вариант 7:

а) $y = \arccos(tgx)$ б) $y = \dfrac{e^x}{\cos x}$ в) $y = 2^x \cdot \sin x$

Вариант 8:

а) $y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \cos 6x$ б) $y = e^{\sin^2 7x}$ в) $y = e^x \cdot \sin x$

Вариант 9:

а) $y = \sqrt{x} - arctg\sqrt{x}$ б) $y = \cos^5 3x \cdot \sin^3 5x$ в) $y = x \cdot e^{-x^2}$

Вариант 10:

а) $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1}$ б) $y = e^{\sin x} \cos^2 x$ в) $y = \sqrt{1 + x^2}$

Вариант 11:

а) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ б) $y=\ln^2\cos\sqrt{x}$ в) $y=(1+x^2)\cdot arctgx$

Вариант 12:

а) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$ б) $y=\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$ в) $y=e^x\cdot(1+x^3)$

Вариант 13:

а) $y=x^2\cdot arctgx^2$ б) $y=5^{\arcsin 2x}$ в) $y=e^{\sqrt{x}}$

Вариант 14:

а) $y=arctg(e^{3x})$ б) $y=\dfrac{\sin x}{1+tg4x}$ в) $y=x\cdot\sqrt{1-x^2}$

Вариант 15:

а) $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ б) $y=x\cdot\sin^2 x$ в) $y=x^2\cdot\ln 3x$

Вариант 16:

а) $y=\sqrt{x^2+1}\cdot\arcsin x$ б) $y=2^{\arcsin^2 3x}$ в) $y=x\cdot\ln 5x$

Вариант 17:

а) $y=\sqrt{x^2+1}\cdot\sin 3x$ б) $y=2^{\sin^2 3x}$ в) $y=e^x\cdot\ln x$

Вариант 18:

а) $y=\sin^5 x+\cos^4 5x$ б) $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ в) $y=x^2\cdot\ln x$

Вариант 19:

а) $y=x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ б) $y=\sin^3 2x$ в) $y=e^{5x^2}$

Вариант 20:

а) $y=\dfrac{3-x^2}{6\sqrt{x}}$ б) $y=\ln tg\sqrt{x}$ в) $y=2^{\sin 3x}$

Вариант 21:

а) $y=(x^2+1)\cdot\ln(1+x^2)$ б) $y=\sqrt{\cos 2x}$ в) $y=(2x+1)^4$

Вариант 22:

а) $y=\frac{2}{x}\cdot\sin x^2$ б) $y=3^{\arcsin 2x}$ в) $y=\ln\sin 2x$

Вариант 23:

а) $y=e^{\sqrt{x}}\cdot tg3x$ б) $y=\arcsin^2(1-3x)$ в) $y=\frac{x^2+1}{x}$

Вариант 24:

а) $y=\ln\frac{3x+1}{3x-1}$ б) $y=\ln^2(\sin 4x)$ в) $y=arctg(x^2)$

Вариант 25:

а) $y=3^{x^2}\cdot arctgx$ б) $y=(1+\cos^2 5x)^3$ в) $y=arcctg2x$

Вариант 26:

а) $y=\sqrt[3]{x}\cdot\ln(1+x^2)$ б) $y=\sin^5 3x$ в) $y=e^{6x}$

Вариант 27:

а) $y=x^2\cdot tg(1-x)+\sqrt{1-x^2}$ б) $y=(x+\sin x)^4$ в) $y=\ln\cos 4x$

Вариант 28:

а) $y=\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}$ б) $y=4^{arctgx^2}$ в) $y=x\cdot e^{2x}$

Вариант 29:

а) $y=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$ б) $y=\arcsin\sqrt{x}$ в) $y=(1-2x)^{11}$

Вариант 30:

а) $y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ б) $y=(x^3+3^x)^3$ в) $y=x^2\cdot\ln x$

Задание 4: Исследовать функцию и построить график

Вариант 1. $y=\frac{1}{1-x^2}$

Вариант 2. $y=\frac{1}{x^2+1}$

Вариант 3. $y=x+\frac{1}{x}$

Вариант 4. $y=x^3-3x^2-9x$

Вариант 5. $y=x^3-4x^2+3x$

Вариант 6. $y=x^3+6x^2+9x+4.$

Вариант 7. $y=x^3-12x-3$

Вариант 8. $y=\frac{x^2-3x-2}{x+1}$

Вариант 9. $y=\frac{x^2-4}{x}$

Вариант 10. $y=\frac{x}{x^2-4}$

Вариант 11. $y=\frac{3x}{x^2+1}$

Вариант 12. $y=\frac{x^3}{x^2-1}$

Вариант 13. $y=\frac{3x}{x+2}$

Вариант 14. $y=\frac{2x+1}{(x+1)^2}$

Вариант 15. $y=\frac{(x-2)^2}{x+1}$

Вариант 16. $y=\frac{x}{9-x^2}$

Вариант 17. $y=\frac{x^2-x-1}{x^2-2x}$

Вариант 18. $y=\frac{1}{1-x^2}$

Вариант 19. $y=x\cdot(x+1)\cdot(x+2)$

Вариант 20. $y=x\cdot(1-x)^2$

Вариант 21. $y=3x^4-4x^3+2$

Вариант 22. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$

Вариант 23. $y=x-\sqrt{x}$

Вариант 24. $y=\frac{x^2}{1-x^2}$

Вариант 25. $y=x^2(1-x)-2$

Вариант 26. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$

Вариант 27. $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$

Вариант 28. $y=36x-3x^2-2x^3$

Вариант 29. $y=(2x-1)^2\cdot x$

Вариант 30. $y=\frac{x^3}{3}-x^2-8x$

Задание 5: Найти неопределенные интегралы и вычислить определенный интеграл:

Вариант 1:

а) $\int (3x^2 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{4 - x^2})dx$ б) $\int \frac{\sin xdx}{(1 + 3\cos x)^2}$ в) $\int\limits_0^1 (2x^3 + 1)^4 \cdot x^2 dx$

Вариант 2:

а) $\int (\frac{1}{\sqrt{x}} + x^5 - \frac{3}{9 + x^2})dx$ б) $\int \frac{dx}{(x-2)^7}$ в) $\int\limits_{\sqrt{3}}^2 \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x^4 - 8} \cdot x^3}{3} dx$

Вариант 3:

а) $\int (\frac{3}{4 + x^2} - 2x + \cos 2x)dx$ б) $\int \frac{3x^2 dx}{2x^3 + 5}$ в) $\int\limits_0^1 (5x^3 + 2)^4 \cdot x^2 dx$

Вариант 4:

а) $\int (4x^3 - \frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}})dx$ б) $\int x^3 \cdot \sqrt{2x^4 - 1} dx$ в) $\int\limits_0^{\pi/2} 12^{\sin x} \cdot \cos xdx$

Вариант 5:

а) $\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ б) $\int e^{2\sin x} \cdot \cos xdx$ в) $\int\limits_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$

Вариант 6:

а) $\int (2\sin 6x - \frac{1}{x} + e^{5x})dx$ б) $\int 2^{x^5} \cdot x^4 dx$ в) $\int\limits_0^3 \frac{1}{(1 + 2x)^9} dx$

Вариант 7:

а) $\int (x^4 + \frac{2}{\sin^2 x} - 3\cos 2x)dx$ б) $\int \sin^3 x \cdot \cos xdx$ в) $\int\limits_0^1 x\sqrt{1 + x^2} dx$

Вариант 8:

а) $\int (3e^{2x} - \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx$ б) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{(1+\sin x)^3}}$ в) $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{dx}{\sin^2 2x}$

Вариант 9:

а) $\int (\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + 2x + \frac{3}{x})dx$ б) $\int tgx dx$ в) $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

Вариант 10:

а) $\int (5e^{2x} - \frac{x+\sqrt{x}}{x^2} + 3)dx$ б) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$ в) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Вариант 11:

а) $\int (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} - \cos 3x)dx$ б) $\int \frac{\ln x dx}{x}$ в) $\int\limits_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1+9x^2}}$

Вариант 12:

а) $\int (\frac{5x\sqrt[3]{x} + 7\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{4+x^2})dx$ б) $\int e^{x^3+1} \cdot x^2 dx$ в) $\int\limits_0^{\pi} \sin^5 x \cos x dx$

Вариант 13:

а) $\int (\cos 2x - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}})dx$ б) $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ в) $\int\limits_2^3 \frac{x^2 dx}{x^3-1}$

Вариант 14:

а) $\int (\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + 4e^{2x})dx$ б) $\int x^2 \sin x^3 dx$ в) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{1+x}$

Вариант 15:

а) $\int (\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} + 5\cos 4x)dx$ б) $\int \frac{dx}{x \ln x}$ в) $\int\limits_3^6 \left(2 - \frac{x}{3}\right)^5 dx$

Вариант 16:

а) $\int \frac{2-4\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$ б) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{(1+\sin x)^3}}$ в) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$

Вариант 17:

а) $\int \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$ б) $\int \frac{\cos xdx}{\sin^3 x}$ в) $\int\limits_0^1 xe^{x^2}dx$

Вариант 18:

а) $\int (4x^3 + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx$ б) $\int \sqrt{1-3x}dx$ в) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{(x+3)^4}$

Вариант 19:

а) $\int (\frac{1}{\sqrt{9-x^2}} - \sqrt[3]{x} + 2e^{5x})dx$ б) $\int \sqrt[3]{2x+4}dx$ в) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{(2x+1)^3}$

Вариант 20:

а) $\int (2+\cos 3x - \frac{1}{9+x^2} - \sqrt[3]{x^2})dx$ б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}dx$ в) $\int\limits_0^2 x^3(2+x^4)^2 dx$

Вариант 21:

а) $\int (\frac{4}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2-9})dx$ б) $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$ в) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{9+x^2}$

Вариант 22:

а) $\int (7-3x+x^3 - \frac{5}{\sin^2 x})dx$ б) $\int \frac{\sin xdx}{(1-2\cos x)^2}$ в) $\int\limits_0^3 (2+x)^5 dx$

Вариант 23:

а) $\int (1+\cos 6x + 2e^{3x})dx$ б) $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}dx$ в) $\int\limits_0^1 x^2(2x^3-3)^3 dx$

Вариант 24:

а) $\int(\frac{1}{x^5}-4\sin x+2\cdot\sqrt[3]{x})dx$ б) $\int\frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-5}}dx$ в) $\int\limits_0^{\pi/2} e^{\cos x}\sin xdx$

Вариант 25:

а) $\int(2\sin 6x-2^x-\frac{1}{x})dx$ б) $\int\frac{x^2}{(x^3-3)^3}dx$ в) $\int\limits_0^1 e^{x^3+1}\cdot x^2dx$

Вариант 26:

а) $\int(3x-\frac{1}{9+x^2}+e^{5x})dx$ б) $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{(\sin x+1)^3}}$ в) $\int\limits_0^{-2}\frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}}$

Вариант 27:

а) $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}-x}{x^2}dx$ б) $\int\cos^2 x\sin xdx$ в) $\int\limits_0^{-1/2} e^{-2x}dx$

Вариант 28:

а) $\int(x^3-\frac{1}{4+x^2}+\frac{2}{\cos^2 x})dx$ б) $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{1-\cos x}}$ в) $\int\limits_0^1(2x^3-1)^4\cdot x^2dx$

Вариант 29:

а) $\int\frac{\sqrt[5]{x^2}+\sqrt{x}-x}{x}dx$ б) $\int\sqrt{2\sin x+1}\cdot\cos xdx$ в) $\int\limits_2^4\frac{dx}{x-1}$

Вариант 30:

а) $\int(4x^3-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{2}{\sin^2 x})dx$ б) $\int e^{\sin x}\cos xdx$ в) $\int\limits_{\sqrt{2}}^3\frac{x}{x^2-1}dx$

Задание 6: Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделать чертёж.

Вариант 1. $y=\frac{1}{2}x^2-1; \quad y=1$

Вариант 2. $y=x^2; \quad y=2-x$

Вариант 3. $y=x^2; \quad y=2-x^2$

Вариант 4. $y=\frac{1}{4}x^2; \quad y=-\frac{1}{2}x^2+3x$

Вариант 5. $y=4x-x^2; \quad y=0$

Вариант 6. $y=(x-2)^2; \quad y=x$

Вариант 7. $y=-\frac{1}{9}x^2+1; \quad y=x+3$

Вариант 8. $y=-x^2; \quad y=x^2-2x-4$

Вариант 9. $y=\frac{6}{x}; \quad y=7-x$

Вариант 10. $y=x^2-6x+7; \; y=x+1$

Вариант 11. $y=x^3; \quad y=2x$

Вариант 12. $y=x^2+4x; \quad y=x+4$

Вариант 13. $y=2x-x^2; \quad y=x$

Вариант 14. $y=x^2+4x-2; \; y=2x-2$

Вариант 15. $y=\frac{4}{x}; \quad y=5-x$

Вариант 16. $y=\frac{1}{2}x^2; \quad y=2-\frac{3}{2}x$

Вариант 17. $y=x^2+1;$

$y=-\frac{1}{9}x^2+1; \quad x=1$

Вариант 18. $y=x^2+6x+3; \quad y=x+3$

Вариант 19. $y=x^2; \quad y=\sqrt{x}$

Вариант 20. $y=x^3; \quad y=8; \quad x=0$

Вариант 21. $y=x^2-8x+16$, $y=6-x$

Вариант 22. $y=-x^2+8x-11$, $y=x-1$

Вариант 23. $y=-x^2+6x-7$, $y=x^2-6x+9$

Вариант 24. $y=-x^2+4x-2$, $y=x^2-4x+4$

Вариант 25. $y=x^2-8x+17$, $y=-x^2+10x-19$

Вариант 26. $y=x^2-2$, $y=3x+2$

Вариант 27. $y = -x^2+2x+9$, $y = 3x^2-6x+5$

Вариант 28. $y=2x^2+4x-5$, $y=x-4$

Вариант 30. $y=x^2-4x+7$, $y=3$

Вариант 29. $y=(x-2)^3$, $y=4x-8$

Задание 7: Дано комплексное число z. Требуется: 1) записать его в алгебраической и тригонометрической формах; 2) найти все корни уравнения $w^3 - z = 0$.

Вариант 1. $z = 2\sqrt{2}/(1+i)$

Вариант 2. $z = 2\sqrt{2}/\left(1+i\sqrt{3}\right)$

Вариант 3. $z = -2\sqrt{2}/(1+i)$

Вариант 4. $z = 2\sqrt{2}/\left(1-i\sqrt{3}\right)$

Вариант 5. $z = 4/(1-i)$

Вариант 6. $z = -4/(1-i)$

Вариант 7. $z = 2\sqrt{2}/\left(\sqrt{3}+i\right)$

Вариант 8. $z = 1/\left(\sqrt{3}+i\right)$

Вариант 9. $z = 1/\left(1-\sqrt{3}i\right)$

Вариант 10. $z = 2\sqrt{2}/\left(\sqrt{3}-i\right)$

Вариант 11. $z = -2\sqrt{2}/(1+i)$

Вариант 12. $z = -1/\left(\sqrt{3}+i\right)$

Вариант 13. $z = -4/(1-i)$

Вариант 14. $z = 2\sqrt{2}/\left(1+i\sqrt{3}\right)$

Вариант 15. $z = -2\sqrt{2}/\left(1-i\sqrt{3}\right)$

Вариант 16. $z = 1/\left(1+\sqrt{3}i\right)$

Вариант 17. $z = -4/(1-i)$

Вариант 18. $z = -4/(1+i)$

Вариант 19. $z = -1/\left(1-\sqrt{3}i\right)$

Вариант 20. $z = -2\sqrt{2}/(1-i)$

Вариант 21. $z = -1/\left(\sqrt{3}-i\right)$

Вариант 22. $z = -2\sqrt{2}/(1+i)$

Вариант 23. $z = -2\sqrt{2}/\left(1-i\sqrt{3}\right)$

Вариант 24. $z = -4/(1-i)$

Вариант 25. $z = 1/\left(1+\sqrt{3}i\right)$

Вариант 26. $z = 1/\left(1+\sqrt{3}i\right)$

Вариант 27. $z = -2\sqrt{2}/(1+i)$

Вариант 28. $z = 2\sqrt{2}/\left(1+i\sqrt{3}\right)$

Вариант 29. $z = -1/\left(\sqrt{3}+i\right)$

Вариант 30. $z = 1/\left(\sqrt{3}+i\right)$

Решение типового варианта

Задание 1: Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

доказать ее совместность и решить тремя способами:

1) Методом Гаусса;

2) По формулам Крамера;

3) Средствами матричного исчисления.

Решение: Теорема Кронекера-Капелли. Система совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы этой системы равен рангу ее расширенной матрицы, т. е. $r(A) = r(A_1)$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right).$$

Расширенная матрица системы имеет вид:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right).$$

Умножим первую строку на (*–3*),а вторую на (*2*); прибавим после этого элементы первой строки к соответствующим элементам второй строки; вычтем из второй строки третью. В полученной матрице первую строку оставляем без изменений.

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & -1 & 10 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Разделим элементы третьей строки на (*6*) и поменяем местами вторую и третью строки:

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 11 & -1 & 10\end{array}\right)\sim$$

Умножим вторую строку на (*–11*) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 10 & 10\end{array}\right)$$

Разделим элементы третьей строки на (*10*).

$$A_1\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right); \quad A\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы A.

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\cdot1\cdot1+0+0-0-0-0=2\neq0.$$

Следовательно, $r(A)=3$. Ранг расширенной матрицы $r(A_1)$ так же равен 3, т.е.

$r(A)=r(A_1)=3 \quad \Rightarrow$ система совместна.

1) Исследуя систему на совместность, расширенную матрицу преобразовали по методу Гаусса.

Метод Гаусса состоит в следующем:

1. Приведение матрицы к треугольному виду, т. е. ниже главной диагонали должны находиться нули (прямой ход).

2. Из последнего уравнения находим x_3 и подставляем его во второе, находим x_2, и зная x_3, x_2 подставляем их в первое уравнение, находим x_1 (обратный ход).

Запишем, преобразованную по методу Гаусса, расширенную матрицу

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

в виде системы трех уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - \ x_2 - \ x_3 = 4 \\ \qquad x_2 - x_3 = 0 \\ \qquad\quad x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x_3 = 1$$

$$x_2 = x_3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1$$

$$2x_1 = 4 + x_2 + x_3 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 = 4 + 1 + 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2x_1 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$$

Ответ: **$x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=1$.**

2) Решим систему по формулам Крамера: если определитель системы уравнений Δ отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Вычислим определитель системы Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) \cdot (-1) - (-1) \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-2) \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) \cdot 4 =$$
$$= 32 + 6 + 6 + 12 - 8 + 12 = 60$$

Т.к. определитель системы отличен от нуля, то согласно правилу Крамера, система имеет единственное решение. Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3. Они получаются из определителя системы Δ заменой соответствующего столбца на столбец свободных коэффициентов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot 4\cdot 4 + 11\cdot(-1)\cdot(-2) + 11\cdot(-2)\cdot(-1) - (-1)\cdot 4\cdot 11 - 4\cdot(-2)\cdot(-2) - 11\cdot(-1)\cdot 4 =$$

$$= 64 + 22 + 22 + 44 - 16 + 44 = 180,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 11\cdot 4 + 3\cdot 11\cdot(-1) + 4\cdot 3\cdot(-2) - (-1)\cdot 11\cdot 3 - 4\cdot 3\cdot 4 - 2\cdot(-2)\cdot$$

$$= 88 - 33 - 24 + 33 - 48 + 44 = 60,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 11 + 11\cdot(-1)\cdot 3 + 3\cdot(-2)\cdot 4 - 4\cdot 4\cdot 3 - 2\cdot(-2)\cdot 11 - 3\cdot(-1)\cdot$$

$$= 88 - 33 - 24 - 48 + 44 + 33 = 60.$$

Находим по формулам неизвестные:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{180}{60} = 3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{60}{60} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{60}{60} = 1.$$

Ответ: **$x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=1$.**

3) Решим систему средствами матричного исчисления, т. е. при помощи обратной матрицы.

$A \cdot X = B \;\Rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} – обратная матрица к A,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ - столбец свободных членов,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ - матрица-столбец неизвестных.

Обратная матрица считается по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

где Δ - определитель матрицы A, A_{ij} – алгебраические дополнения элемента a_{ij} матрицы A. Δ = 60 (из предыдущего пункта). Определитель отличен от нуля, следовательно, матрица А обратима, и обратную к ней матрицу можно найти по формуле (∗). Найдем алгебраические дополнения для всех элементов матрицы А по формуле:

$A_{ij}=(-1)^{i+j}\ M_{ij}$.

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix}=16-4=12;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & 4\end{vmatrix}=-(-4-2)=6;$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-(12+6)=-18;$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=8+3=11;$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-6-12=18;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-(-4+3)=1;$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=2+4=6;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-(-4+3)=1;$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}24 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=8+3=11.$

Запишем обратную матрицу.

$$A^{-1}=\frac{1}{60}\cdot\begin{pmatrix}12 & 6 & 6\\ -18 & 11 & 1\\ -18 & 1 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10}\\ -\frac{3}{10} & \frac{11}{60} & \frac{1}{60}\\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{60} & \frac{11}{60}\end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку по формуле: $A^{-1}\cdot A=E$.

$A^{-1}A=$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{11}{60} & \frac{1}{60} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{60} & \frac{11}{60} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10} & -\frac{1}{5}+\frac{4}{10}-\frac{2}{10} & -\frac{1}{5}-\frac{2}{10}+\frac{4}{10} \\ -\frac{6}{10}+\frac{33}{60}+\frac{3}{60} & \frac{3}{10}+\frac{44}{60}-\frac{2}{60} & \frac{3}{10}-\frac{22}{60}+\frac{4}{60} \\ -\frac{6}{10}+\frac{3}{60}+\frac{33}{60} & \frac{3}{10}+\frac{4}{60}-\frac{22}{60} & \frac{3}{10}-\frac{2}{60}+\frac{44}{60} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вывод: так как произведение $A^{-1}\cdot A$ дает единичную матрицу, то обратная матрица A^{-1} найдена верно и решение системы определяется по формуле $X=A^{-1}\cdot B$.

$$X=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{11}{60} & \frac{1}{60} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{60} & \frac{11}{60} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5}\cdot 4+\frac{1}{10}\cdot 11+\frac{1}{10}\cdot 11 \\ -\frac{3}{10}\cdot 4+\frac{11}{60}\cdot 11+\frac{1}{60}\cdot 11 \\ -\frac{3}{10}\cdot 4+\frac{1}{60}\cdot 11+\frac{11}{60}\cdot 11 \end{pmatrix}=.$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{4}{5}+\frac{11}{10}+\frac{11}{10} \\ -\frac{12}{10}+\frac{121}{60}+\frac{11}{60} \\ -\frac{12}{10}+\frac{11}{60}+\frac{121}{60} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=1$.

Проверка. Подставим полученные значения в систему. Получим:

$$\begin{cases} 2\cdot 3-1\cdot 1-1\cdot 1=6-1-1=4 \\ 3\cdot 3+4\cdot 1-2\cdot 1=9+4-2=11 \\ 3\cdot 3-2\cdot 1+4\cdot 1=9-2+4=11 \end{cases}$$

Т. к. неизвестные x_1 , x_2, x_3 обратили каждое уравнение в тождество, то они найдены верно.

Задание 2: Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5+4x-x^2}{x^2-16x+55}$;

Функция $\dfrac{5+4x-x^2}{x^2-16x+55}$ не определена при $x=5$ и поэтому разрывна в этой точке. Числитель и знаменатель в точке $x=5$ обращается в нуль, налицо неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Выделим общий множитель (x-5) и сократим на него числитель и знаменатель, считая $x\neq 5$, $x\to 5$.

$$\lim_{x\to 5}\frac{5+4x-x^2}{x^2-16x+55}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(-x-1)}{(x-5)(x-11)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-1}{x-11}=\frac{-5-1}{5-11}=\frac{-6}{-6}=1$$

.

б) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}-4x^2}$;

Ни числитель, ни знаменатель этой дроби не имеют конечного предела так как они неограниченно возрастают при неограниченном возрастании x, т. е. имеем дело с неопределенностью $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Поделим числитель и знаменатель дроби на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}-4x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\dfrac{3}{x^{3/2}}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^{3/2}}-4\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{x^{3/2}}+\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^{3/2}}-4}=\frac{1+0+0}{0-0-4}=-\frac{1}{4}$$

так как $\dfrac{3}{x^{3/2}}$, $\dfrac{2}{x^2}$, $\dfrac{3}{x^2}$, $\dfrac{1}{x^{3/2}}$ при $x\to\infty$ – величины бесконечно малые.

в) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}$;

Поскольку числитель и знаменатель обращаются в нуль при $x=0$, то имеем дело с неопределенностью вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Воспользуемся тригонометрической формулой для преобразования знаменателя $2\sin^2 x=1-\cos 2x$ и получим предел, в котором участвует тригонометрическая функция $\sin x$.

Применив первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

так как $\dfrac{x}{\sin x}\to 1$ при $x\to 0$.

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^{2x}$.

Предел функции $\dfrac{x+5}{x+2}$ при $x\to 0$ равен единице, т.е. в данном примере требуется раскрыть неопределенность $\left[1^{\infty}\right]$. Примеры такого вида сводятся ко второму замечательному пределу $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Преобразуем выражение в скобках к виду $\left(1+\dfrac{k}{x+a}\right)$

$$\frac{x+5}{x+2}=\frac{(x+2)+3}{x+2}=1+\frac{3}{x+2}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{3}\cdot\frac{3}{x+2}\cdot 2x}=e^{6},$$

т. к. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{3}}=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{x+2}=6$.

Задание 3: Найти производные следующих функций

а) Найти производную функции $y=x\cos x\sin x+\dfrac{1}{2}\cos^2 x$.

Решение:

Сначала преобразуем данную функцию: $y=\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x \cdot 2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x \cdot (-\sin x) =$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

б) Найти производную функции $y = \dfrac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$.

Решение:

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{2x^3 e^{x^2} + 2x^5 e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3 e^{x^2} - 2x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} = \frac{2xe^{x^2}(x^4+1+x^2)}{(x^2+1)^2}$$

в) Найти производную функции $y = \ln tg\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{\sin x}$.

Решение:

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x\cos x}{\sin^2 x}.$$

г) Найти производную функции $y = (\sin 2x)^{x^2+1}$.

Решение:

Логарифмируем данную функцию

$$\ln y = \ln(\sin 2x)^{x^2+1},$$
$$\ln y = (x^2+1)\cdot\ln(\sin 2x),$$

Дифференцируем

$$\frac{y'}{y} = (x^2+1)'\ln(\sin 2x) + (x^2+1)\cdot(\ln(\sin 2x))',$$

$$\frac{y'}{y}=2x\cdot\ln(\sin 2x)+\left(x^2+1\right)\cdot\frac{2\cos 2x}{\sin 2x},$$

Выражаем

$$y'=\left(2x\cdot\ln(\sin 2x)+2\cdot\left(x^2+1\right)\operatorname{ctg}2x\right)\cdot y\,.$$

Или

$$y'=\left(2x\cdot\ln(\sin 2x)+2\cdot\left(x^2+1\right)\operatorname{ctg}2x\right)\cdot(\sin 2x)^{x^2+1}.$$

Задание 4: Исследовать функцию $y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$ и построить график.

Решение.

1. Данная функция не определена при $x=2$, т. к. в этой точке знаменатель обращается в ноль. Значит

$$D(f)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty).$$

2. $f(-x)=\frac{(-x+1)}{-x-2} \quad \Rightarrow f(-x)\neq f(x), \qquad f(-x)\neq -f(x).$

Следовательно, функция общего вида.

3. Не периодична.

4. Точки пересечения с осью *Ox*: $y=0$ при $(x+1)^2=0$, $x=-1$. С осью *Oy*: $x=0$,

$y=\frac{(0+1)^2}{0-2}=-\frac{1}{2}$. Нашли две точки пересечения графика функции с осями координат: $(-1;0)$ и $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

5. Исследуем на непрерывность. Точкой разрыва является $x=2$. Определим тип разрыва. Для этого найдем односторонние пределы функции в данной точке.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{(x+1)^2}{x-2}=\frac{3^2}{-0}=-\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 2+0}\frac{(x+1)^2}{x-2}=\frac{3^2}{+0}=+\infty\,.$$

Значит, $x=2$ – точка разрыва второго рода.

6. Из предыдущего пункта следует, что $x=2$ – вертикальная асимптота.

Найдем наклонную асимптоту $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{(x-2)\cdot x}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)^2}{(x-2)}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{x-2}=4.$$

Итак, $y=x+4$ – наклонная асимптота.

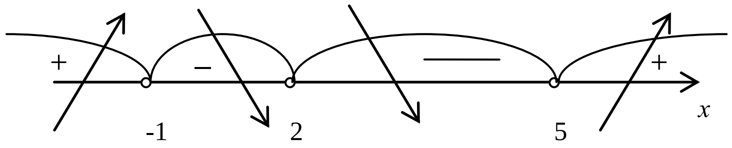
7. Исследуем на возрастание, убывание и экстремум функции. Для этого найдем производную функции.

$$y'=\left(\frac{(x+1)^2}{x-2}\right)'=\frac{2(x+1)(x-2)-(x+1)^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}=\frac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}.$$

Найдем точки, в которых производная равна нулю $y'=0$.

$$(x-5)(x+1)=0 \Rightarrow x=5 \text{ и } x=-1.$$

Далее отметим данные точки на числовой оси и к ним добавляем точку $x=2$, в которой y' не определена.



Находим интервалы, на которых $y'>0$: $x\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$ и

$y'<0$: $x\in(-1;2)\cup(2;5)$.

При прохождении точки $x=-1$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, $x=-1$ – точка экстремума функции, а именно максимум.

$$x_{max}=-1 \;\Rightarrow\; y_{max}=\frac{(-1+1)^2}{-1-2}=0.$$

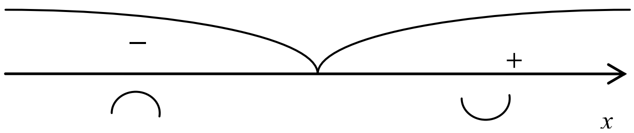
При прохождении точки $x=5$ производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, $x=5$ так же является точкой экстремума функции, а именно минимумом.

$$x_{\min}=5 \;\Rightarrow\; y_{\min}=\frac{(5+1)^2}{5-2}=12.$$

8. Исследуем на вогнутость функции и точки перегиба. Для этого находим производную второго порядка.

$$y''=\left(\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}\right)'=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x-5)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{18}{(x-2)^3}.$$

Вторая производная в ноль никогда не обращается, поэтому на числовой оси отмечаем только $x=2$.

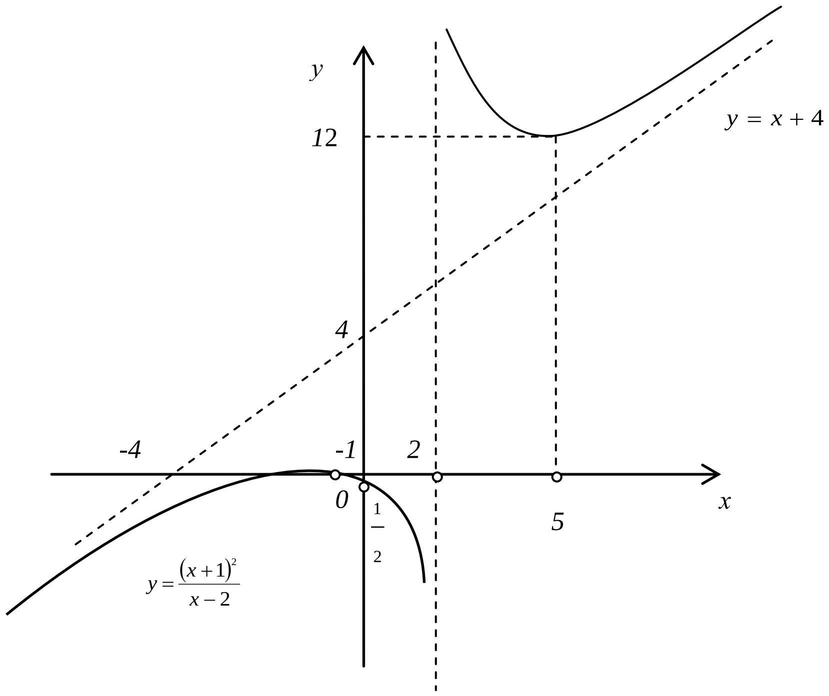


$y''>0$: $x\in(2;+\infty)$ – функция вогнута и $y''<0$: $x\in(-\infty;2)$ – выпукла. Точек перегиба нет.

Составим таблицу, в которую занесем полученные сведения.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;2)$	2	$(2;5)$	5	$(5;+\infty)$
y'	+	0	–	не сущ.	–	0	+
y''	–		–	не сущ.	+		+
y	$\nearrow$ $\cap$	max	$\searrow$ $\cap$	верт. ас.	$\searrow$ $\cup$	min	$\nearrow$ $\cup$

После того, как собрали все данные, полученные в ходе исследования, изобразим характерное поведение графика данной функции. (См. рис.).



Задание 5: Найти неопределенные интегралы и вычислить определенный интеграл

а) $\int \frac{\cos 3x}{4+\sin 3x}dx$;

Делая замену $\left\{\begin{matrix} 4+\sin 3x = u, \\ 3\cos 3xdx, \\ \frac{du}{3} = \cos 3xdx \end{matrix}\right\}$, получаем:

$$\int \frac{\cos 3x}{4+\sin 3x}dx = \int \frac{du/3}{u} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \{u = 4+\sin 3x\} = \frac{1}{3}\ln|4+\sin 3x| + C$$

.

б) $\int \frac{dx}{x^2-16x+65}$;

Выделяем полный квадрат в знаменателе дроби $\frac{1}{x^2-16x+65}$.

Получаем $x^2-16x+65=(x-4)^2+4^2+65=(x-4)^2-16+65=(x-4)^2+49$.

Тогда получаем табличный интеграл типа: $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$.

$$\int \frac{dx}{x^2-16x+65} = \int \frac{dx}{(x-4)^2+49} = \int \frac{dx}{(x-4)^2+7^2} = \frac{1}{7} arctg \frac{x-4}{7} + C.$$

в) $\int x^2 e^{3x} dx$;

Применим два раза формулу интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Получаем

$$\int x^2 e^{3x} dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2, & du = 2x, \\ dv = e^{3x}dx, & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right\} = \frac{x^2}{3} \cdot e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \left\{ \begin{matrix} u = x, & du = dx, \\ dv = e^{3x}dx, & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right\}$$

$$= \frac{x^2}{3} \cdot e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3} \cdot e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right) = \frac{x^2}{3} \cdot e^{3x} - \frac{2x}{9} \cdot e^{3x} + \frac{2}{9}\int e^{3x}dx =$$

$$= \frac{x^2}{3} \cdot e^{3x} - \frac{2x}{9} \cdot e^{3x} + \frac{2}{27} \cdot e^{3x} + C = e^{3x} \cdot \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}\right) + C.$$

г) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+5x^2+8x+4}$.

Разложим знаменатель дроби $\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}$ на множители. Получаем:

$$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+1) \cdot (x^2+4x+4) = (x+1) \cdot (x+2)^2 .$$

Множителю $(x+2)^2$ соответствует сумма двух простейших дробей $\frac{A}{(x+2)^2} + \frac{B}{x+2}$, т. к. кратность корня $x = -2$ равняется двум. Множителю $(x+1)$ – простейшая дробь $\frac{C}{x+1}$.

Итак, подынтегральная функция может быть представлена в виде суммы трех простейших дробей.

$$\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}=\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}=\frac{A}{(x+2)^2}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+1}.$$

Приводим к общему знаменателю и, приравнивая числители двух последних дробей, получаем

$x^2=A\ (x+1)+B(x+2)(x+1)+C(x+2)^2,$

$x^2=Ax+A+Bx^2+3Bx+2B+Cx^2+4Cx+4C.$

Сгруппируем члены при одинаковых степенях x.

$x^2=x^2(B+C)+x(A+3B)+x^0(A+2B+4C).$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 1=B+C \\ x^1 & 0=A+3B+4C \\ x^0 & 0=A+2B+C \end{array}$$

В итоге имеем систему

$$\begin{cases} B+C=1, \\ A+3B+4C=0, \\ A+2B+4C=0. \end{cases}$$

Решая систему одним из известных методов, получаем *A=-4, B=0, C=1.*

Итак, разложение рациональной дроби на простейшие, имеет вид

$$\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}=-\frac{4}{(x+2)^2}+\frac{1}{x+1}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}=\int\frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+1)}=\int\left(\frac{-4}{(x+2)^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx=$$
$$=-4\int\frac{dx}{(x+2)^2}+\int\frac{dx}{x+1}=\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C$$

$$\int_1^2(6x^2-4x+3)dx=\left(\frac{6x^{2+1}}{2+1}-\frac{4x^{1+1}}{1+1}+\frac{3x^{0+1}}{0+1}\right)=(2x^3-2x^2+3x)=$$

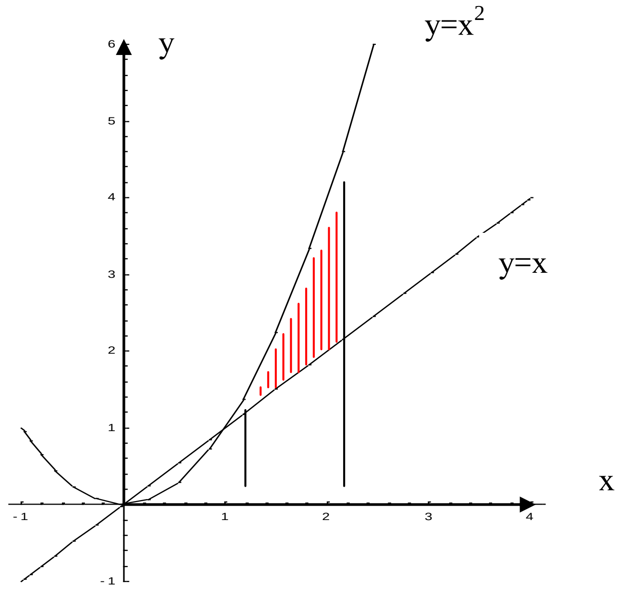
д) $=(2\cdot2^3-2\cdot2^2+3\cdot2)-(2\cdot1^3-2\cdot1^2+3\cdot1)=$

$=(16-8+6)-(2-2+3)=14-3=11$

Задание 6: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x,\ y = x^2,\ x = 2.$$

Решение:



Искомая площадь (заштрихована на рисунке) может быть найдена по формуле:

$$S = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}(\text{ед}^2)$$

Задание 7: Дано комплексное число z. Требуется:

1. записать число z в алгебраической и тригонометрической формах;
2. найти все корни уравнения $\omega^3 - z = 0$.

$$z = \frac{-2\sqrt{2}}{1+i}.$$

Решение:

1) Комплексное число z в алгебраической форме имеет вид: $z=a+bi$;

в тригонометрической форме: $z=r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$, где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $\varphi = arctg\,\frac{b}{a}$.

Для тог чтобы записать $z = \frac{-2\sqrt{2}}{1+i}$ в алгебраической форме, умножим числитель и знаменатель на сопряженное к знаменателю, т. е. на *1- i*.

$$z = \frac{-2\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{1-i^2} = \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{2} = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i.$$

$z = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ - алгебраическая форма.

$a = -\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$, $r = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2+2} = 2$,

$$\varphi = arctg\,\frac{\sqrt{2}}{\left(-\sqrt{2}\right)} = arctg\,(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

$z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ - тригонометрическая форма.

2) $\omega^3 = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt[3]{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$.

Так как число $z = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ в тригонометрической форме

$$z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt[3]{2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}.$$

Применяя формулу для извлечения корня из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

получаем

$$\omega = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right) \approx 1{,}26\left(\cos\left(45^0 + 120^0 k\right) + i\sin\left(45^0 + 120^0 k\right)\right)$$

Если *k=0*, то $\omega_0 \approx 1{,}26\left(cos 45^0 + i\sin 45^0\right)$;

Если *k=1*, то $\omega_1 \approx 1{,}26\left(cos 165^0 + i\sin 165^0\right)$;

Если $k=2$, то $\omega_2 \approx 1{,}26\left(cos\,285^0 + i\sin 285^0\right)$.

Следовательно, корни уравнения в алгебраической форме имеет вид

Ответ:

$$\omega_0 \approx 0{,}8909 + i \cdot 0{,}8909,$$

$$\omega_1 \approx -1{,}217 + i \cdot 0{,}326,$$

$$\omega_2 \approx 0{,}326 - i \cdot 1{,}217.$$

Учебно- методическое обеспечение дисциплины

Перечень рекомендуемые учебных изданий, интернет – ресурсов, дополнительной литературы:

Основные источники:

1. Учебник для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования «Математика» И.Д.Пехлецкий., Москва: Academia, 2002
2. Письменный Д.В Конспект лекций по высшей математике (I часть)М.Рольф.2002
3. Письменный Д.В Конспект лекций по высшей математике (II часть) М.Рольф.2002

Дополнительные источники:

1. Алексеев А.С., Белоновская Л.Н. и др. Дидактические материалы (для 10 классов вечерней общеобразовательной школы) М.Просвещение. 1988

2. Брадис В.М.4-х значные математические таблицы.М.Просвещение .1974

3. Виленкин Н.Я., Мордкович А.Г.Производная и интеграл. М. Просвещение.1993

4. Выгодский М.Я.Справочник по высшей математике .М. Джангар.2001

5. Ганеев Х.Ж.Учителю математики об элементах краеведения. Екатеринбург.1996

6. Гольдич В.А.Алгебра: решение уравнений и неравенств. Санкт-Петербург. Литера.2005

7. Денищева Л.О., Корешкова Т.А. Тематические тесты и зачёты. Алгебра и начала анализа.М. Мнемозина. 2007

8. Денищева Л.О., Кузнецова Л.В. и др. Зачёты в системе дифференцированного обучения.М. Просвещение. 1993 Вариант IМ. Интеллект-центр.2001

9. Звавич Л.И., Поташник А.М. и др.Сборник задач по алгебре и математическому анализу (для 10-11 кл)М.Новая школа.1996

10. Колягин Ю.М., Ткачева М.В, Федерова Н.Е. и др. под ред. Жижченко А.Б. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 10 кл. – М., 2005.

11. Клеймёнов А.Ф, Шнейдер А.Е. Задачи письменного экзамена по математике за курс старшей и основной школы. ИРРО.1999

12. Колмогорова А.Н. Учебное пособие: Алгебра и начала анализа. М. Просвещение .1982

13. Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С. Алгебра и элементарные функции. Часть I М.Просвещение. 1971

14. Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С. Алгебра и элементарные функции. Часть II М.Просвещение. 1971

15. Мордкович А.Г., Сухорский А.М.Справочник школьника по математике.10 –11 класс.М.Аквариум. 1989

16. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 11 кл. – М., 2006.

17. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 10 кл. – М., 2006.

18. Саакян С.М., Гольдман А.М. и др.Задачи по алгебре и началам анализа ,10- 11 класс.М.Просвещение. 1992

19. Черкасов Р.С., Столяр А.А.Методика преподавания математики.М. Просвещение. 1985

20. Фирсов В.В.Планирование обязательных результатов обучения математике.М.Просвещение. 1989

21. Шарыгин И.Ф., голубеев В.И.Факультативный курс по математике (решение задач).М .Просвещение.1991

Интернет-ресурсы:

http://www.youtube.com/watch?v=TxFmRLiSpKo (Геометрический смысл производной)

http://www.youtube.com/watch?v=PbbyP8oEv-g (Лекция 1. Первообразная и неопределенный интеграл)

http://www.youtube.com/watch?v=2N-1jQ_T798&feature=channel (Лекция 5. Интегрирование по частям)

http://www.youtube.com/watch?v=3qGZQW36M8k&feature=channel (Лекция 4. Таблица основных интегралов)

http://www.youtube.com/watch?v=7lezxG4ATcA&feature=channel (Лекция 3. Непосредственное интегрирование)

http://www.youtube.com/watch?v=s-FDv3K1KHU&feature=channel (Лекция 4. Метод подстановки)

http://www.youtube.com/watch?v=dU_FMq_lss0&feature=channel (Лекция 12.Понятие определенного интеграла)

http://www.youtube.com/watch?v=wg_AIYBB0dg&feature=related (Гиперметод умножения)

http://www.youtube.com/watch?v=C_7clQcJP-c (Теория вероятности)

http://www.youtube.com/watch?v=dZPRzB1Nj08 (Лекция 6. Комплексные числа (часть 1))

http://www.youtube.com/watch?v=Cfy0CXpR9Lo (Комплексные числа и фракталы. Часть 1)

http://www.youtube.com/watch?v=uis7Hg2gSNo&feature=related (Теория фракталов)